

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA METODOLOGIA DE CÁLCULO PARA A SIMULAÇÃO DE MANCAIS RADIAIS
SUBMETIDOS A CARREGAMENTO DINÂMICO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ADILSON LUIZ MANKE

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1991

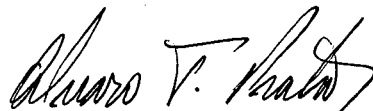
UMA METODOLOGIA DE CÁLCULO PARA A SIMULAÇÃO DE MANCAIS RADIAIS
SUBMETIDOS A CARREGAMENTO DINÂMICO

ADILSON LUIZ MANKE

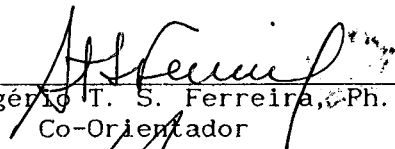
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

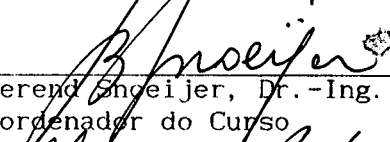
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS TÉRMICAS,
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.



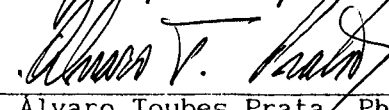
Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.
Orientador



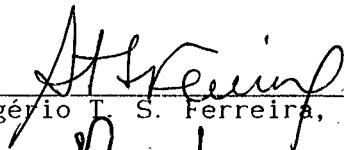
Prof. Rogério T. S. Ferreira, Ph.D.
Co-Orientador



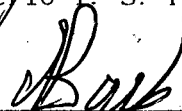
Prof. Berend Snoeijs, Dr.-Ing.
Coordenador do Curso



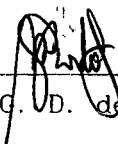
Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.
Presidente



Prof. Rogério T. S. Ferreira, Ph.D.



Prof. Nelson Back, Ph.D.



Eng.º Marcos G. D. de Bortoli, M.Sc.

BANCA EXAMINADORA:

"Teoria é o Capitão, prática são os soldados".

Leonardo da Vinci

À minha Mãe, pelo ensino da Paciência e Dedicação.

Ao meu Pai, pelo ensino da Responsabilidade.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Álvaro Toubes Prata que, com sua competência na docência, tornou prazeroso o aprendizado da Engenharia.

Aos Amigos que, com sua companhia, tornaram agradáveis o trabalho e o lazer.

Aos meus Irmãos, pelo apoio e incentivo.

SIMBOLOGIA

a	Aceleração
c	Folga radial
C	Força peso do eixo
C^*	$\frac{c^2}{\mu UR^2 L} C$
D	Diâmetro do eixo (ou mancal)
e	Excentricidade
\hat{e}	Vetor unitário
f	Coeficiente de atrito
F	Força hidrodinâmica
F^*	$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) \frac{c^2}{\mu UR^2 L} F$
F_A	Força de atrito
F_r	Força resultante
F_A^*	$\frac{c}{\mu UR^2} F_A$
g	Aceleração da gravidade
G	Coeficiente turbulento
h	Espessura do filme de óleo
h_{min}	Espessura mínima do filme de óleo
H	h/c
l	Número total de pontos na direção x (ou η)
l ₂	l-1
l_m	Comprimento de mistura
L	Largura do mancal
m	Número total de pontos na direção y (ou ξ)
m	Massa do eixo

m_2	$m-1$
N	Rotação do eixo
p	Pressão
p_{\max}	Pressão máxima
P	$\frac{c^2}{6\mu UR} p H^{3/2}$
P_u	Carga por área projetada W/LD
POT	Potência dissipada no mancal
q	Vazão de lubrificante por unidade de largura
Q_L	Vazão lateral
Q_L^*	$\frac{2}{cUR} Q_L$
R	Raio do eixo (ou mancal)
Re	Número de Reynolds $\rho U c / \mu$
Re^*	Número de Reynolds modificado $Re(c/R)$
Re_c	Número de Reynolds crítico $41,1(c/R)^{1/2}$
S	Termo fonte
t	Tempo
T	Torque resistente no eixo
u	Velocidade do fluido na direção x
U	Velocidade tangencial da superfície sólida (eixo ou mancal)
v	Velocidade do fluido na direção y
V	Velocidade axial da superfície sólida (eixo ou mancal)
\dot{V}	Variação do volume de controle no tempo
w	Velocidade radial da superfície sólida (eixo ou mancal)
W	Carga
W^*	$\frac{c^2}{\mu U R^2 L} W$
x	Direção circunferencial $R\theta$
y	Direção axial
y	y/R
z	Direção radial

SÍMBOLOS GREGOS

α	Posição da fronteira de cavitação
$\dot{\alpha}$	$d\alpha/dt$
$\dot{\alpha}^*$	$d\alpha/d\tau$
β	Número capilar modificado
β, γ_{FH}	Posição da linha de centros relativamente ao sistema de referência (x,y) $\gamma_w - \psi$
γ_w	Posição da carga relativamente ao sistema de referência (x,y)
δ	Distância entre dois pontos nodais vizinhos
δ	$1000(c/R)$
Δ	Número de Sommerfeld $\frac{c^2}{\mu\omega R^3 L} W$
$\Delta\eta, \Delta\xi$	Dimensões do volume de controle
$\Delta\tau$	Incremento de tempo adimensional
ϵ	Razão de excentricidade e/c
$\dot{\epsilon}$	$d\epsilon/dt$
$\ddot{\epsilon}$	$d^2\epsilon/dt^2$
$\dot{\epsilon}^*$	$d\epsilon/d\tau$
$\ddot{\epsilon}^*$	$d^2\epsilon/d\tau^2$
η	$\frac{\theta}{\pi+\alpha}$
θ	Coordenada angular
Λ	Posição da força peso relativamente ao sistema de referência (1,2)
μ	Viscosidade absoluta do fluido lubrificante
μ_t	Viscosidade turbulenta
ξ	y/R
ρ	Massa específica do fluido lubrificante
τ_s	Tensão superficial
τ	Tempo adimensional ωt

τ_E	Tensão cisalhante na interface fluido/superfície do eixo
τ_{ij}	Tensão cisalhante
ϕ	Posição da carga relativamente ao sistema de referência (x,y) - ângulo no quadrante
ψ	Ângulo de atuação
$\dot{\psi}$	$d\psi/dt$
$\ddot{\psi}$	$d^2\psi/dt^2$
$\dot{\psi}^*$	$d\psi/d\tau$
$\ddot{\psi}^*$	$d^2\psi/d\tau^2$
ω	Velocidade angular do eixo
ω_L	Frequência de rotação da carga $d\gamma_w/dt$
ω_p	Frequência de oscilação da carga
ω_L^*	ω_L/ω
$\dot{\omega}_L^*$	$d\omega_L^*/d\tau$

SUB-ÍNDICES

1	Superfície sólida do eixo
	Posição de início do filme de óleo
	Direção ao longo da linha de centros
2	Superfície sólida do mancal
	Posição de término do filme de óleo
	Direção normal à linha de centros
i, j	Notação indicial (1,2,3)
x	Direção ao longo do eixo x
y	Direção ao longo do eixo y

SUPERÍNDICES

- Valor médio
- ' Flutuação
- ^ Flutuação média
- * Adimensional
- .. Derivada temporal de 2^a ordem
- Derivada temporal de 1^a ordem

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1	Efeito cunha no mancal - Perfil linear de velocidade	12
Fig. 2	Efeito cunha no mancal - Perfil de velocidade real e distribuição de pressão ao longo do escoamento	13
Fig. 3	Efeito de filme espremido	14
Fig. 4	Extensão do domínio de solução: (a) mancal de escora; (b) mancal radial	15
Fig. 5	Geometria do mancal radial	17
Fig. 6	Caso geral de carregamento dinâmico	19
Fig. 7	Domínio de solução: (a) domínio físico; (b) domínio transformado .	21
Fig. 8	Vista planificada do mancal radial	30
Fig. 9	Distribuição de pressão para a condição de Sommerfeld	31
Fig. 10	Distribuição de pressão para a condição de meio-Sommerfeld	31
Fig. 11	Distribuição de pressão real em um mancal radial	32
Fig. 12	Balanço de forças considerando a massa do eixo	35
Fig. 13	Balanço de forças desconsiderando a massa do eixo	38
Fig. 14	Volume de controle típico do processo de solução	41
Fig. 15	Volume de controle típico adjacente à fronteira de cavitação	44
Fig. 16	Perfil α ao longo da fronteira de cavitação	47
Fig. 17	Fluxograma computacional do acoplamento das equações de Reynolds e da fronteira de cavitação	49
Fig. 18	Fluxograma para a determinação da trajetória do eixo segundo o método de Euler	55
Fig. 19	Fluxograma para determinação da trajetória do eixo segundo o método de Runge-Kutta	57
Fig. 20	Fluxograma para determinação da trajetória do eixo segundo o método de Substituição	60

Fig. 21	Fluxograma para determinação da trajetória do eixo segundo o método de Runge-Kutta	62
Fig. 22	Localização do ponto de espessura mínima do filme de óleo	72
Fig. 23	Volume de controle típico adjacente à fronteira lateral	77
Fig. 24	Comparativo entre malhas - Trajetória do eixo submetido a uma carga constante e vertical: (a) caso 1; (b) caso 2	83
Fig. 25	Erros associados à razão de excentricidade para diferentes malhas (Relativos à malha de 60x41 pontos): (a) caso 1; (b) caso 2	84
Fig. 26	Convergência do campo de pressões em mancal submetido a carregamento estático	87
Fig. 27	Comparativo entre métodos de cálculo da fronteira de cavitação: (a) caso 1; (b) caso 2	90
Fig. 28	Influência do incremento de tempo na determinação da fronteira de cavitação	91
Fig. 29	Comparativo entre os métodos de cálculo da trajetória do eixo para $\Delta\tau = 0,03$ - Considerando a massa do eixo	93
Fig. 30	Comparativo entre os métodos de cálculo da trajetória do eixo para $\Delta\tau = 0,01$ - Considerando a massa do eixo	93
Fig. 31	Diagrama polar do carregamento aplicado ao mancal do caso 3	95
Fig. 32	Trajetoária do eixo submetido a um carregamento alternativo - Método de Substituição	96
Fig. 33	Trajetoária do eixo quando submetido a um carregamento constante - Formulação laminar: (a) caso 4; (b) caso 5	98
Fig. 34	Análise do carregamento de magnitude e rotação constantes - Rotação da carga em sentido positivo	100
Fig. 35	Trajetoária do eixo na ausência de efeito cunha	101
Fig. 36	Comportamento da capacidade de carga do mancal com relação à velocidade de rotação da linha de centros	101
Fig. 37	Análise do carregamento de magnitude e rotação constantes - Rotação da carga em sentido negativo	102

Fig. 38	Trajectoria do eixo quando $\omega_L = \omega/2$	103
Fig. 39	Diagrama polar do carregamento aplicado ao mancal do caso 6	104
Fig. 40	Comparativo da trajetória do eixo para o mancal do caso 6 quando submetido ao carregamento da figura 39: (a) presente trabalho; (b) Jones [19]	104
Fig. 41	Comparativo da variação da posição de mínima espessura do filme de óleo - caso 6	105
Fig. 42	Comparativo da vazão lateral de óleo - caso 6	105
Fig. 43	Evolução do campo de pressão na linha de simetria do mancal em diversos instantes do ciclo de carregamento	106
Fig. 44	Comparativo de malhas para o caso 6	107
Fig. 45	Trajectoria do eixo utilizando-se formulações laminar e turbulenta - Caso 4: (a) laminar; (b) turbulenta	109
Fig. 46	Trajectoria do eixo utilizando-se formulações laminar e turbulenta - Caso 5: (a) laminar; (b) turbulenta	109
Fig. 47	Trajectoria do eixo obtida com o modelo de mancal curto - Caso 6 ..	111
Fig. 48	Comparativo da vazão lateral obtida pelos modelos de mancal finito e mancal curto	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Comparativo entre valores do número de Sommerfeld e posição da fronteira de cavitação obtidas por diferentes trabalhos; L/D = 1/2	81
Tabela 2 Características geométricas e de operação dos casos analisados no carregamento dinâmico	84
Tabela 3 Comparativo entre critérios de convergência	88

RESUMO

A presente dissertação trata da simulação numérica de mancais radiais finitos submetidos a carregamentos dinâmicos. A equação de Reynolds, que descreve o escoamento do filme de óleo, é integrada através do método dos volumes finitos. A formulação inclui a presença da cavitação do filme de óleo bem como a possibilidade do escoamento ser tanto laminar como turbulento. A fim de abordar o problema de fronteira livre associado à cavitação, uso é feito de coordenadas não ortogonais que se adaptam ao domínio de solução. O escoamento turbulento é tratado com um modelo algébrico.

O comportamento dinâmico do mancal é caracterizado pela trajetória do eixo. Um balanço entre a força hidrodinâmica e o carregamento, a cada instante do tempo, fornece um sistema de equações diferenciais ordinárias que, quando resolvido, permite que a trajetória do eixo seja determinada. Diferentes métodos são apresentados e testados para a solução deste sistema de equações.

A interação do problema hidrodinâmico associado ao filme de óleo com o problema de dinâmica do eixo é responsável pela geração de um campo de pressão continuamente variável com o tempo. A partir do conhecimento deste campo de pressão, as características operacionais do mancal, tais como vazão de óleo e perdas por fricção mecânica, podem ser determinadas.

A metodologia de cálculo apresentada no presente trabalho mostrou ser versátil e eficiente. Quando comparado com resultados disponíveis na literatura o programa computacional forneceu boa concordância.

ABSTRACT

The present work is a numerical simulation of finite journal bearings under dynamic loading. The Reynolds equation, which describes the oil film flow, is integrated using the finite volume method.

The formulation includes the presence of the oil film cavitation and the possibility of the flow be either laminar or turbulent. In order to solve the free boundary problem associated to the cavitation, non-orthogonal boundary fitted coordinates are employed. The turbulent flow is treated using an algebraic model.

The dynamic behavior of the bearing is characterized by the journal path. A balance between the hydrodynamic force and the loading at each time step provides an ordinary differential equation system which is used to calculate the journal path. Different methodologies are presented and tested to solve this system.

The interaction between the hydrodynamic problem associated with the oil film and the dynamic problem of the journal is responsible for the generation of a time-dependent pressure field. From this field the operational characteristics of the bearing, such as oil flow and mechanical losses, can be obtained.

The numerical methodology used in the present work has proved to be efficient and versatile, and, when compared with numerical results from the literature, led to good agreement.

ÍNDICE

SIMBOLOGIA	vi
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiv
RESUMO	xv
ABSTRACT	xvi
 CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	 1
1.1 Objetivo	1
1.2 Histórico e Revisão Bibliográfica	2
1.3 Proposta de Trabalho	10
 CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	 12
2.1 Formulação Laminar da Equação de Reynolds	15
2.2 Formulação Turbulenta da Equação de Reynolds	23
2.3 Determinação da Equação da Fronteira de Cavitação	28
2.4 Determinação das Equações da Trajetória do Eixo	33
2.4.1 Trajetória Considerando a Massa do Eixo	34
2.4.2 Trajetória Desconsiderando a Massa do Eixo	37
 CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	 39
3.1 Discretização da Equação de Reynolds	40
3.2 Resolução Numérica da Fronteira de Cavitação	43
3.2.1 Método Estático	48
3.2.2 Método de Euler	49
3.2.3 Método Semi-Implicito	50

3.3 Resolução Numérica do Sistema de Equações Diferenciais da	
Trajetória - Considerando a Massa do Eixo	52
3.3.1 Método de Euler	53
3.3.2 Método de Runge-Kutta de 4 ^a ordem	56
3.4 Resolução Numérica do Sistema de Equações Diferenciais da	
Trajetória - Desconsiderando a Massa do Eixo.....	58
3.4.1 Método de Substituição	59
3.4.2 Método de Runge-Kutta	61
 CAPÍTULO 4 - APROXIMAÇÃO DE MANCAL RADIAL CURTO	63
4.1 Equação para o Carregamento Dinâmico	64
4.2 Equação Analítica da Força Hidrodinâmica	65
4.3 Determinação das Equações da Trajetória do Eixo	67
4.3.1 Considerando a Massa do Eixo	67
4.3.2 Desconsiderando a Massa do Eixo	67
 CAPÍTULO 5 - CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS	70
5.1 Espessura Mínima do Filme de Óleo	70
5.2 Perdas por Fricção Mecânica	72
5.3 Vazão Lateral de Óleo	75
5.4 Posicionamento dos Canais de Alimentação de Óleo	77
 CAPÍTULO 6 - RESULTADOS E DISCUSSÕES	79
6.1 Generalidades	80
6.1.1 Determinação da Malha Computacional	80
6.1.2 Critérios de Convergência	85
6.2 Avaliação das Metodologias Apresentadas	88
6.2.1 Avaliação das Metodologias para a Determinação da	
Fronteira de Cavitação	89

6.2.2 Avaliação das Metodologias para a Determinação da Trajetória do Eixo	92
6.3 Validação do Modelo Numérico	96
6.3.1 Mancal Submetido a um Carregamento Dinâmico - Considerando a Massa do Eixo	97
6.3.2 Mancal Submetido a um Carregamento Dinâmico - Desconsiderando a Massa do Eixo	99
6.4 Análise de Mancais em Escoamento Turbulento	108
6.5 Comparação entre os Modelos de Mancal Finito e Mancal Curto	110
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118
APÊNDICES	
APÊNDICE A - Equação de Reynolds da Lubrificação Hidrodinâmica	123
APÊNDICE B - Determinação da Equação da Espessura do Filme de Óleo	126
APÊNDICE C - Determinação das Velocidades do Eixo em Relação ao Mancal no Carregamento Dinâmico	128
APÊNDICE D - Adimensionalização da Equação de Reynolds para Carregamento Dinâmico - Formulação Laminar	130
APÊNDICE E - Equação de Reynolds para Carregamento Dinâmico - Formulação Turbulenta	134
APÊNDICE F - Determinação das Equações da Trajetória - Considerando a Massa do Eixo	137
APÊNDICE G - Discretização da Equação de Reynolds para Carregamento Dinâmico - Formulação Turbulenta	143
APÊNDICE H - Determinação da Equação da Fronteira de Cavitação em Mancais Submetidos a Carregamento Dinâmico - Formulação Turbulenta	148

APÊNDICE I - Determinação do Sistema de Equações da Trajetória - Desconsi- derando a Massa do Eixo	155
APÊNDICE J - Determinação Analítica da Força Hidrodinâmica para a Aproxima- ção de Mancais Curtos - Formulação Turbulenta	158
APÊNDICE K - Tabelas de Resultados	163

1. INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVO

A análise do desempenho de mancais radiais hidrodinâmicos em máquinas alternativas tem como objetivo a determinação das características operacionais tais como a espessura instantânea do filme de óleo, vazão de óleo e perdas mecânicas por fricção.

O conhecimento destas características operacionais permite a otimização dos mancais através da variação dos parâmetros geométricos e da escolha criteriosa do lubrificante a ser utilizado. Desta forma obtém-se um sistema operando com alto rendimento e confiabilidade.

As máquinas alternativas, entre elas os compressores, possuem um carregamento cíclico aplicado sobre os moentes e mancais do seu eixo de manivelas. Este carregamento é caracterizado pela variação no tempo da magnitude e direção do vetor força. É, portanto, um exemplo do caso mais complexo de carregamento aplicado sobre mancais.

Conhecido o carregamento ao qual cada mancal está submetido, suas características operacionais são determinadas pela aplicação da teoria da lubrificação hidrodinâmica através da resolução da equação de Reynolds.

1.2 HISTÓRICO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Registros antigos mostram que o atrito entre corpos em contato é uma preocupação do homem há milhares de anos. A invenção da roda é um dos exemplos clássicos. Outro exemplo é dado pelos egípcios que deixaram gravados em suas pirâmides desenhos que indicam o seu conhecimento da propriedade lubrificante de determinados líquidos.

Diversos pensadores de renome estudaram os mecanismos envolvidos no contato entre corpos sólidos, estudos estes que deram origem à ciência hoje conhecida como tribologia. A seguir serão revisadas algumas destas contribuições.

Leonardo da Vinci em 1508 descobriu que a resistência ao movimento dos corpos parados ou em baixa velocidade era proporcional ao peso e independente da área de contato. Entretanto, segundo da Vinci, alisando-se ou lubrificando-se estas superfícies o atrito era reduzido. Após duzentos anos Amontons (1699) redescobriu os mesmos fatos e Coulomb (1785), partindo destas observações, descobriu que o atrito era independente da velocidade - pelo menos na pequena faixa investigada. Neste contexto não se enquadra o atrito estático, que possui um valor maior que o atrito cinético [1].

Até esta época a lubrificação era realizada, principalmente, pelo uso de graxas. Com o desenvolvimento de métodos mais precisos na fabricação de componentes de máquinas, a partir da Revolução Industrial, a lubrificação hidrodinâmica tornou-se um tipo usual de lubrificação e, conseqüentemente, passou a ser estudada com mais interesse. Os primeiros destes estudos devem-se a von Pauli e Hirn.

Von Pauli (1849) direcionou seus estudos na determinação dos coeficientes de atrito para, através destes, encontrar as melhores ligas metálicas para uso em mancais. O mesmo objetivo teve Kirchweger (1862) em seus trabalhos com lubrificação hidrodinâmica. Já Hirn (1854) teve como objetivo a determinação dos coeficientes de atrito para, a partir deles, avaliar diversos

tipos de óleos lubrificantes. Entretanto, foi Petroff (1883), baseado nos experimentos de Hirn, quem primeiro enfatizou que o atrito em mancais era de natureza hidrodinâmica e estabeleceu a seguinte relação [2]:

$$f = \frac{F_A}{W} = 2\pi^2 \frac{\mu N}{P_U} \frac{1000}{\delta} \quad (1)$$

onde: $f \rightarrow$ coeficiente de atrito;
 $F_A \rightarrow$ força de atrito;
 $W \rightarrow$ carga;
 $\mu \rightarrow$ viscosidade do lubrificante;
 $N \rightarrow$ rotação do eixo;
 $P_U \rightarrow$ carga por área projetada;
 $\delta \rightarrow$ 1000 c/R.

A equação (1) é conhecida como lei de Petroff e fornece, até hoje, valores precisos do coeficiente de atrito em mancais radiais submetidos a pequenas cargas.

Um novo estágio na lubrificação hidrodinâmica inicia-se com a publicação dos experimentos de Tower (1883) [3] com mancais radiais, que relata a existência de pressões hidrodinâmicas de valores consideráveis. A partir destes resultados Reynolds (1886) [4] formulou matematicamente o problema da lubrificação hidrodinâmica, mostrando que a origem das elevadas pressões ao redor do mancal era devida ao efeito cunha gerado pela diferença entre os diâmetros do mancal e do eixo. Segundo Reynolds, essa folga radial era formada pela dilatação térmica diferenciada do mancal de bronze e do eixo de aço.

Reynolds, em seu trabalho pioneiro, chegou a apresentar soluções para a equação diferencial por ele formulada e previu a existência de uma fronteira de cavitação. Adicionalmente, descreveu as condições de contorno corretas, assim como mencionou as hoje conhecidas condições de contorno de Sommerfeld e meio-Sommerfeld, entre outras discussões [4,5].

A equação formulada por Reynolds foi obtida partindo-se da equação

completa da hidrodinâmica, conhecida como equação de Navier-Stokes, utilizando-se diversas hipóteses simplificativas, listadas a seguir:

- a) ausência de forças de campo;
- b) pressão constante através da espessura do filme de óleo (direção doravante denominada de z);
- c) curvatura das superfícies deslizantes grande quando comparada com a espessura do filme de óleo (mancais radiais);
- d) condição de inexistência de deslizamento nas superfícies sólidas (paredes);
- e) escoamento laminar;
- f) efeitos de inércia do fluido possíveis de serem desprezados;
- g) viscosidade constante;
- h) efeitos transientes associados ao termo que contém a derivada no tempo possíveis de serem desprezados.

Assumidas estas hipóteses, a equação de Navier-Stokes reduz-se às seguintes equações nas direções x e y respectivamente* [6]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2b)$$

que, juntamente com o uso da equação da continuidade, fornecem a equação de Reynolds na sua forma mais completa, conforme dedução detalhada apresentada no Apêndice A:

* Estas mesmas equações podem ser obtidas considerando-se um elemento de fluido em equilíbrio no qual atuam tensões cisalhantes e pressão, sendo que as tensões cisalhantes podem ser substituídas pela viscosidade a partir do uso da lei de Newton do escoamento viscoso, segundo a qual:

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(U_1 + U_2) \frac{h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(V_1 + V_2) \frac{h}{2} \right] + (w_h - w_o) \quad (3)$$

A fim de obter-se o campo de pressão no filme de lubrificante, aplica-se, a esta equação, condições de contorno apropriadas.

A equação (3) é uma equação diferencial parcial, não-homogênea, com coeficientes variáveis. Devido à complexidade desta equação, os primeiros esforços foram no sentido de resolvê-la e, ao mesmo tempo, obter soluções que pudessem ser facilmente utilizadas.

Resultados satisfatórios foram obtidos ao considerar-se o mancal infinitamente longo, hipótese esta diretamente relacionada ao nome de Sommerfeld. Devido às suas contribuições neste sentido, Sommerfeld ocupa hoje uma posição de destaque na área da lubrificação hidrodinâmica.

Ao sugerir que em um mancal longo as variações de pressão na direção axial poderiam ser desconsideradas, Sommerfeld (1904) [7] chegou, a partir da integração direta da equação de Reynolds, às expressões analíticas para a distribuição de pressão, carga, e coeficientes de atrito. Obteve, desta forma, curvas de excentricidade versus ângulo de atuação.

Outras contribuições de Sommerfeld estão relacionadas ao estabelecimento de condições de contorno, à introdução do número adimensional definido por,

$$\Delta = \frac{c^2}{\mu \omega R^3 L} W \quad (4)$$

onde:

- $c \longrightarrow$ folga radial;
- $\omega \longrightarrow$ velocidade angular do eixo;
- $R \longrightarrow$ raio do eixo;
- $L \longrightarrow$ largura do mancal;
- $\mu \longrightarrow$ viscosidade absoluta do lubrificante;
- $W \longrightarrow$ carga;

e à substituição matemática dada por:

$$(1+\epsilon\cos\theta) = \frac{1-\epsilon^2}{(1-\epsilon\cos\psi)} \quad (5)$$

que facilitou a obtenção da solução analítica da equação de Reynolds para o caso unidimensional [2,6]. Nesta equação ψ refere-se a um ângulo de substituição, possuindo os mesmos valores que θ apenas para os ângulos 0, π e 2π .

Outro grande passo dado para estabelecer as bases da lubrificação hidrodinâmica foi dado por Michell (1905) ao patentear o mancal de escora. Michell [8] chegou à solução de um mancal de escora finito através do uso de funções de Bessel. Outros estudos com mancais de escora foram realizados por Kingsbury (1907) e Lord Rayleigh (1918).

No entanto, a grande contribuição feita por Kingsbury foi ter descoberto, acidentalmente, que o filme de lubrificante não tem que ser, necessariamente, um óleo ou líquido, mas pode ser um gás. Sua descoberta sobre a ação "hidrodinâmica" dos gases ficou sem fundamentação teórica até 1913, quando Harrison formulou a equação diferencial da lubrificação para fluidos compressíveis, que possui a seguinte forma [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = U \frac{\partial (ph)}{\partial x} \quad (6)$$

Alguns anos mais tarde, em 1925, foram publicados dois trabalhos analisando duas características importantes dos mancais radiais que até então ainda não haviam sido objeto de estudo: a dinâmica e a estabilidade dos mancais. O primeiro destes trabalhos, realizado por Stodola, considera que o mancal não é um suporte rígido, mas um sistema vibratório, cujas características de rigidez e amortecimento influem no comportamento dinâmico do mancal [5].

A outra descoberta, relatada no trabalho de Newkirk e Taylor [9], trata da instabilidade induzida do mancal. Encontrando vibrações do eixo que não podiam ser atribuídas ao desbalanceamento do mesmo nem ao atrito interno, Newkirk descobriu que esta instabilidade estava diretamente associada às características do filme de óleo. Hoje este efeito é conhecido como *half-frequency whirl*.

A partir dos trabalhos pioneiros citados anteriormente, a lubrificação hidrodinâmica tem merecido a atenção de inúmeros pesquisadores. Diversos trabalhos têm sido publicados nas mais diversas áreas da lubrificação, relatando novas descobertas e o aperfeiçoamento de técnicas de resolução da equação de Reynolds.

Com o contínuo avanço no desenvolvimento dos computadores e dos métodos numéricos de solução de equações diferenciais, a lubrificação hidrodinâmica também passou a buscar soluções mais completas e menos restritivas da equação de Reynolds. Uma revisão das técnicas utilizadas e os avanços realizados até meados da década de sessenta é feita por Campbell et al. [10].

Um dos métodos descritos por Campbell, e ainda hoje largamente utilizado, é o método gráfico da mobilidade [11]. Desenvolvido por J.F. Booker e baseado na aproximação de mancal curto, este é um método extremamente versátil podendo ser resolvido numericamente [12]; sua desvantagem é de só poder ser aplicado a mancais lisos (sem ranhuras ou canais de alimentação de óleo). Esta característica negativa dos métodos gráficos e analíticos - a restrição às formas simples e parâmetros operacionais constantes, não é verificada nos métodos numéricos.

Com a vantagem inicial de resolver a equação de Reynolds na sua forma bidimensional, os métodos numéricos possuem, ainda, a capacidade de incorporar as mais diversas características de forma e operação dos mancais. Martin [13] apresenta uma revisão dos desenvolvimentos de técnicas no projeto de mancais ocorridos até o início da década de oitenta, através da qual pode ser observado

o potencial dos métodos numéricos.

Ao resolver a equação de Reynolds numericamente, as hipóteses simplificativas (a) a (h), listadas anteriormente, não precisam necessariamente ser adotadas. Encontram-se na literatura diversos trabalhos, como aqueles referenciados em [13], nos quais a equação (3) é resolvida para fluidos não-Newtonianos ou que consideram a variação da viscosidade com a temperatura e/ou pressão.

Ao analisar mancais trabalhando em regime de altas rotações e/ou com óleos lubrificantes de baixa viscosidade, é imprescindível que a equação de Reynolds seja estendida a escoamentos turbulentos. Diversos estudos tiveram como finalidade a determinação de coeficientes turbulentos que se baseiam em uma viscosidade aparente oriunda do aumento da difusão de partículas fluidas associada ao regime turbulento. Dentre tais estudos destacam-se os trabalhos de Constantinescu [14] que baseou-se no modelo do comprimento de mistura de Prandtl, Ng et al. [15] que usou a teoria de difusão de vórtices e, mais recentemente, a contribuição de Wada et al. [16] que determinou estes coeficientes utilizando o conceito de escoamento global (*bulk flow*). Todos estes pesquisadores obtiveram resultados coerentes com os valores experimentais.

Com os mancais passando a funcionar em regime de escoamento turbulento, a hipótese simplificada (f) passou a ser questionada de forma mais vigorosa. A validade de tal hipótese foi analisada nos trabalhos de Hashimoto et al. [17,18], que avaliaram a influência da inércia do fluido no número de Sommerfeld, ângulos de atuação e excentricidade. As variáveis independentes adotadas por Hashimoto et. al. foram o número de Reynolds e parâmetros geométricos do mancal, como a relação L/D (largura/ diâmetro).

Além de propiciar a obtenção de soluções mais precisas pelo uso de modelos mais completos, a solução da equação de Reynolds através de métodos numéricos também permite a incorporação, no modelo, de uma variada gama de detalhes construtivos dos mancais, como a presença de canais de alimentação de

óleo e ranhuras axiais ou circunferenciais [19]. Adicionalmente, pode-se considerar a influência das deformações elásticas do mancal no comportamento dinâmico do mesmo, conforme apresentado em [20] e [21].

Os métodos numéricos permitiram ainda avaliar, de maneira mais precisa, a extensão do filme de óleo, ou seja, a posição da fronteira de cavitação. O ponto correto onde se posiciona esta fronteira é variável na direção axial do mancal, como pode ser observado pelos experimentos realizados por Pinkus [6].

A cavitação do óleo está associada ao fato da cavidade formada entre o eixo e o mancal tornar-se divergente a partir do ponto de folga mínima. Como a área associada à vazão de óleo aumenta gradativamente a partir deste ponto, em determinada posição o óleo existente não é suficiente para escoar na forma de um filme contínuo, passando a escoar em estria e caracterizando a fronteira de cavitação.

Coyne e Elrod [22] desenvolveram um modelo teórico para determinar a forma da fronteira de cavitação quando o mancal está submetido a carregamentos leves, levando em consideração a tensão superficial, inércia do fluido, e a ação da gravidade. Ao utilizar este modelo como condição de contorno para a equação de Reynolds, obteve resultados de boa concordância com os experimentos [23].

Savage [24] mostra que a condição de contorno de Reynolds, ou seja, de gradiente de pressão zero na fronteira de cavitação, é válida quando o mancal está submetido a um regime de funcionamento em que o número capilar modificado, dado por $\beta = \tau_g c / \mu U R$, é muito menor que a unidade. Observa-se que a maior parte dos mancais estudados enquadra-se na condição de $\beta \ll 1$.

Apesar da fronteira de cavitação possuir uma forma variável na direção axial do mancal, a aproximação de mancal curto (unidimensional), onde tal fato não é levado em consideração, tem sido largamente utilizada. Entretanto este modelo tem suas restrições, como mostradas por Prata e Ferreira [25]. Neste trabalho é testada a validade da aproximação de mancal curto

comparando-se tal modelo com uma análise bidimensional do mancal. Observa-se uma boa correlação entre os dois modelos apenas para pequenas excentricidades e baixas relações L/D (largura/diâmetro).

Os estudos sobre a fronteira de cavitação e a validade dos modelos unidimensionais acima mencionados, referem-se a mancais submetidos a carregamentos estáticos. Ao considerar carregamentos dinâmicos o conhecimento sobre o comportamento do filme de óleo, bem como sobre a validade de modelos unidimensionais, ainda é pequeno. Lang [26], por exemplo, afirma que um mancal circunferencialmente ranhurado não apresenta ruptura do filme de óleo quando submetido a um carregamento dinâmico, ou seja, a folga radial permanece completamente preenchida durante todo o ciclo de carregamento. Entretanto, Jones [19], ao utilizar a técnica conhecida como *oil film history*, técnica esta que incorpora no modelo numérico o acompanhamento local da vazão de óleo, prevê a ruptura do filme de óleo em carregamentos dinâmicos e obtém resultados para a vazão de óleo bastante parecidos aos experimentais. Através das conclusões destes dois trabalhos, pode-se observar as divergências ainda existentes com relação à cavitação, quando se trata de mancais submetidos a carregamento dinâmico.

1.3 PROPOSTA DE TRABALHO

O presente trabalho apresenta uma metodologia numérica de resolução da equação de Reynolds na sua forma completa, ou seja, considera-se o mancal finito (bidimensional) submetido a um carregamento dinâmico.

A equação de Reynolds é integrada numericamente através do método dos volumes finitos usando uma malha não ortogonal adaptada à fronteira do filme de óleo, introduzida por Prata e Ferreira [25]. A fronteira de cavitação

é determinada através do uso das condições de contorno de Reynolds em conjunto com a condição de continuidade do escoamento [24].

Na metodologia a ser apresentada, prevê-se tanto regime laminar como turbulento. Para escoamentos turbulentos o modelo baseia-se nos coeficientes turbulentos determinados por Wada et al. [16].

O carregamento dinâmico é estudado tanto para cargas constantes como variáveis em magnitude e direção. É analisada a influência da massa do eixo no comportamento dinâmico do mancal, e sua importância na determinação da órbita descrita pelo eixo.

Considera-se o eixo perfeitamente alinhado com o mancal, o fluido lubrificante como sendo um fluido Newtoniano e incompressível, a viscosidade como sendo constante (modelo isotérmico) e desprezam-se os efeitos de inércia do fluido, sendo esta última uma hipótese plenamente aceitável em escoamentos em regime laminar e razoável para escoamentos turbulentos.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Segundo Reynolds, em seu artigo histórico [4], as pressões geradas em um mancal radial estão associadas ao efeito cunha provocado pelo carregamento, devido à folga radial entre o mancal e o eixo.

A fim de entender o processo de geração de pressão pelo efeito cunha, considere o filme convergente conforme a geometria apresentada na figura 1. A superfície superior permanece estacionária, enquanto a inferior desloca-se com velocidade U .

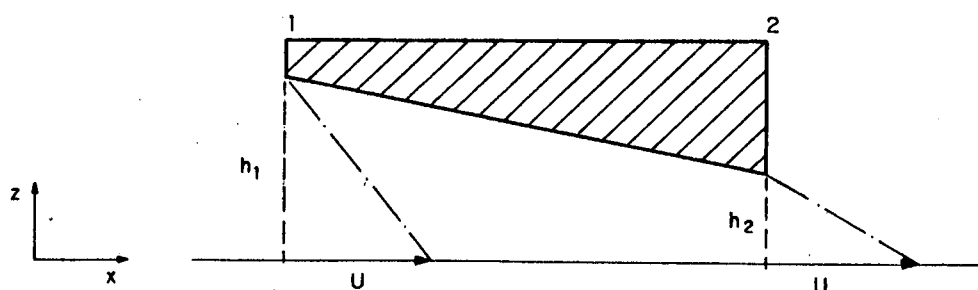


Figura 1 - Efeito cunha no mancal - Perfil linear de velocidade.

Se forem considerados os perfis lineares de velocidade apresentados na figura 1, tem-se uma velocidade média igual a $U/2$ tanto na entrada quanto na saída do filme convergente. A vazão por unidade de largura em cada uma das

posições 1 e 2 considerando que não existe vazão lateral de fluido, será,

$$q_{x1} = \frac{\rho h_1 U}{2} \quad (7a)$$

$$q_{x2} = \frac{\rho h_2 U}{2} \quad (7b)$$

ou seja, para um fluido incompressível ($\rho = \text{cte}$) e como $h_1 > h_2$, a continuidade não seria satisfeita.

Na realidade, a geometria convergente origina um gradiente de pressão que induz uma restrição ao escoamento de fluido na entrada (gradiente positivo) e, ao mesmo tempo, impulsiona o fluido na saída (gradiente negativo). Consequentemente, os perfis de velocidade são deformados, apresentando a forma indicada na figura 2. Tais perfis certamente satisfazem a continuidade.

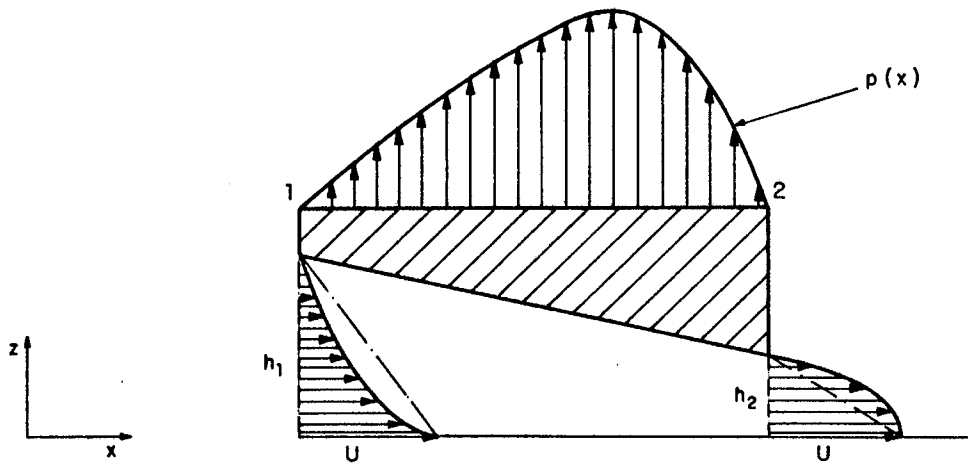


Figura 2 - Efeito cunha no mancal - Perfil de velocidade real e distribuição de pressão ao longo do escoamento

A distribuição de pressão assim obtida é capaz de suportar uma carga W , por unidade de largura, dada por:

$$W = \int_1^2 p(x) dx \quad (8)$$

Quando se considera o comportamento dinâmico do mancal, surge outro mecanismo capaz de gerar um campo de pressões, que é o efeito de filme espremido. Este efeito sempre ocorre quando um filme de fluido viscoso, entre duas superfícies, é forçado para fora devido à aproximação destas superfícies (figura 3).

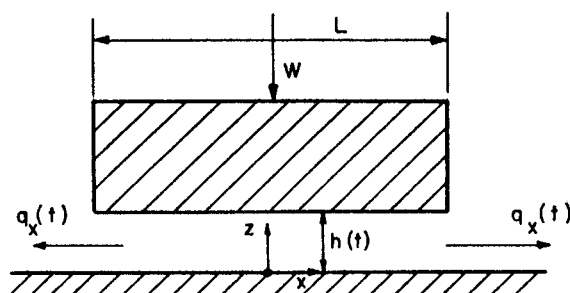


Figura 3 - Efeito de filme espremido.

Através da análise da equação de Reynolds (3) observa-se a presença destes dois mecanismos de geração do campo de pressões. Esta equação é uma equação do tipo Poisson, onde o termo associado ao aparecimento de um campo de pressão está no lado direito da igualdade,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(U_1 + U_2) \frac{h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(V_1 + V_2) \frac{h}{2} \right] + (w_h - w_0) \quad (3)$$

Os dois mecanismos de geração de pressão são:

* **Efeito cunha** → representado pelos dois primeiros termos do lado direito da equação, mostra que se as velocidades relativas das superfícies do mancal forem zero ou se não existir uma variação da espessura do filme de óleo ao longo de uma das direções, o efeito cunha não existirá.

* **Efeito de filme espremido** → representado pelo último termo do lado direito da equação, mostra que existe a necessidade de aproximação das duas superfícies ($w_h \neq 0$ ou $w_0 \neq 0$) para que ocorra o efeito de filme espremido.

2.1 FORMULAÇÃO LAMINAR DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

A solução de qualquer equação diferencial requer a especificação de um domínio de solução e do comportamento da variável nas fronteiras deste domínio, ou seja, as condições de contorno.

O tratamento de um mancal radial difere fundamentalmente de um mancal de escora no que se refere à condição de contorno na saída do filme de óleo. Analisando-se a figura 4, observa-se que, enquanto no mancal de escora o domínio de solução e as condições de contorno são conhecidas a priori, no mancal radial não se conhece a extensão do domínio na direção circunferencial. Consequentemente, as condições de contorno no início e no final do filme de óleo não são conhecidas.

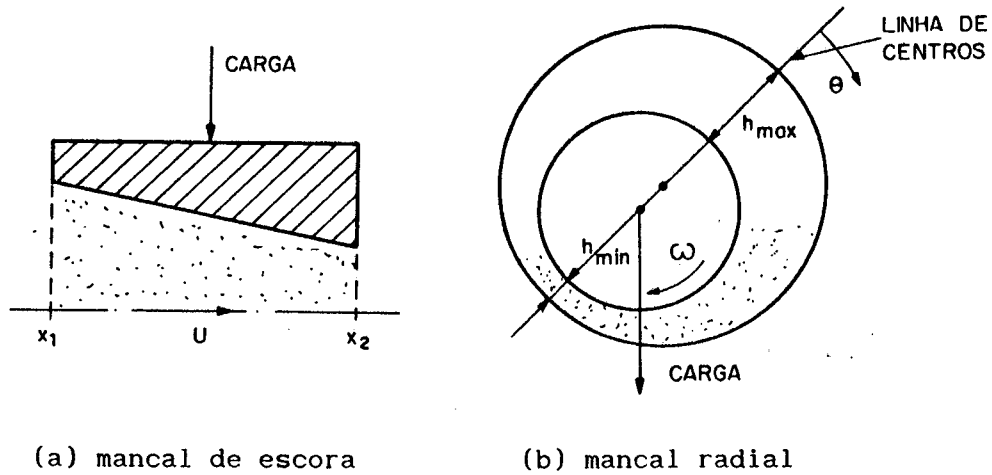


Figura 4 - Extensão do domínio de solução.

Para o mancal de escora tem-se como condições de contorno,

$$p = 0^* \quad \text{em } x = x_1 \quad (9a)$$

$$p = 0^* \quad \text{em } x = x_2 \quad (9b)$$

* O campo de pressões originado no mancal é baseado em uma pressão de referência, geralmente a pressão ambiente, de forma que,

$$p = p' - p_{ref}$$

e portanto $p = 0$ em x_1 e x_2 .

No caso do mancal radial, tem-se,

$$p = 0 \text{ em } \theta = \theta_1 \quad (10)$$

onde θ_1 , início do filme de óleo, é a posição em que se encontra o canal ou ranhura de alimentação de óleo. A correta determinação da posição do final do filme de óleo θ_2 , é mais complexa e será abordada com mais detalhes em seção subsequente.

A posição θ_2 é conhecida como fronteira de cavitação e, para esta condição,

$$p = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \text{ em } \theta = \theta_2 \quad (11)$$

que é a condição que melhor representa a situação física [2,6].

No caso particular de mancais radiais, conforme ilustrado na figura 5, observa-se que alguns dos parâmetros operacionais constantes na equação (3) possuem valor nulo. São eles,

$$U_2 = V_1 = V_2 = w_0 = 0 \quad (12)$$

que referem-se ao fato do mancal ser fixo ($U_2 = V_2 = w_0 = 0$) e o eixo não possuir movimento axial ($V_1 = 0$) e ainda,

$$dx = R d\theta \quad (13)$$

Considerando o anterior, a equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas para mancais radiais assume a seguinte forma,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \theta} (U h) + w_h \quad (14)$$

onde por simplicidade fez-se $U_1 = U$. As condições de contorno de Reynolds serão as utilizadas neste trabalho.

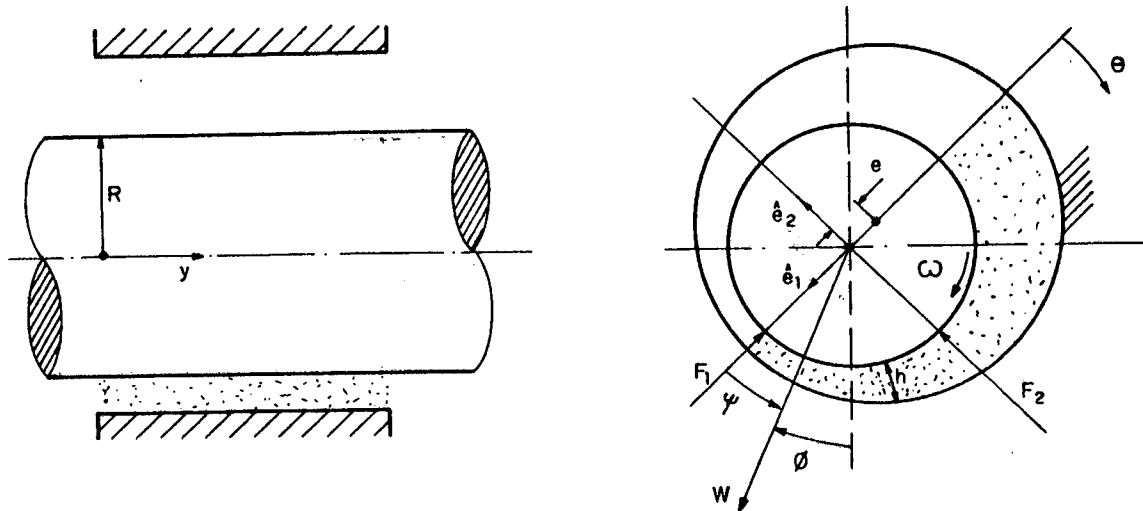


Figura 5 - Geometria do mancal radial.

A espessura do filme de óleo h , variável com θ , é expressa pela seguinte equação, deduzida no Apêndice B,

$$h = c(1 + \epsilon \cos \theta) \quad (15)$$

Ao considerar-se o carregamento dinâmico, o centro do eixo move-se em relação ao mancal e, conseqüentemente, as componentes U e w_h da velocidade do eixo devem levar em consideração este movimento. De acordo com a dedução apresentada no Apêndice C, tem-se as seguintes expressões para as velocidades U e w_h , respectivamente,

$$U = \omega R \quad (16a)$$

$$w_h = c \frac{d\epsilon}{dt} \cos \theta + c \epsilon \frac{d}{dt} (\phi - \psi) \sin \theta \quad (16b)$$

Substituindo as equações (16a) e (16b) na equação (14) tem-se,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + c \frac{d\epsilon}{dt} \cos \theta + c \epsilon \frac{d}{dt} (\phi - \psi) \sin \theta \quad (17)$$

Lembrando que h é definido pela equação (15) e que

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} \quad (18a)$$

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} \quad (18b)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \\ = \frac{1}{2c^2} \left[2\dot{\epsilon} \cos \theta - \epsilon \sin \theta (\omega - 2\omega_L + 2\dot{\psi}) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

onde ω_L é a frequência de rotação da carga, definida por:

$$\omega_L = \frac{d\phi}{dt} \quad (20)$$

Observa-se pela equação (19), que o modelo matemático apresentado está apto a resolver o caso mais abrangente de carregamento dinâmico, caracterizado por:

$$\text{i) filme dinâmico} \longrightarrow \omega \neq 0 \quad (21a)$$

$$\text{ii) carga rotativa} \longrightarrow \omega_L \neq 0 \quad (21b)$$

$$\text{iii) carga variável} \longrightarrow \omega_p \neq 0 \quad (21c)$$

Tal carregamento é ilustrado pela figura 6.

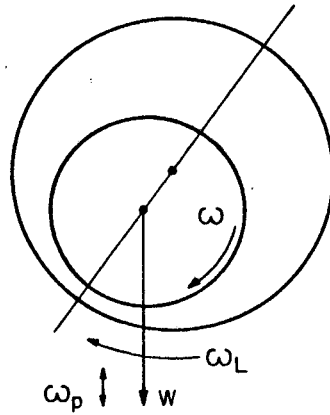


Figura 6 - Caso geral de carregamento dinâmico.

A equação (19) pode ser escrita na forma adimensional utilizando-se as seguintes variáveis adimensionais,

$$P = \frac{pc^2}{6\mu UR} (1+\epsilon \cos\theta)^{3/2} \quad (22a)$$

$$y^* = \frac{y}{R} \quad (22b)$$

$$\tau = \omega t \quad (22c)$$

$$\omega_L^* = \frac{\omega_L}{\omega} \quad (22d)$$

Fazendo uso das variáveis anteriores, a equação de Reynolds torna-se (ver Apêndice D),

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = A(\theta)\dot{\epsilon}^* + B(\theta)\dot{\psi}^* + C(\theta)P + D(\theta) \quad (23)$$

onde,

$$A(\theta) = 2\cos\theta/(1+\epsilon\cos\theta)^{3/2} \quad (24a)$$

$$B(\theta) = -2\epsilon\sin\theta/(1+\epsilon\cos\theta)^{3/2} \quad (24b)$$

$$C(\theta) = -3/4[2\epsilon\cos\theta + \epsilon^2\cos^2\theta + \epsilon^2\cos(2\theta)]/(1+\epsilon\cos\theta)^2 \quad (24c)$$

$$D(\theta) = (2\omega_L^* - 1)\epsilon\sin\theta/(1+\epsilon\cos\theta)^{3/2} \quad (24d)$$

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (24e)$$

$$\dot{\psi}^* = \frac{d\psi}{d\tau} \quad (24f)$$

As condições de contorno associadas à equação (23) são,

$$i) \quad P = 0 \quad \text{em} \quad y^* = 0 \quad (25a)$$

$$ii) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y^* = L/D \quad (25b)$$

$$iii) \quad P = 0 \quad \text{em} \quad \theta = 0 \quad (25c)$$

$$iv) \quad P = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \text{em} \quad \theta = \theta_2 \quad (25d)$$

A equação de Reynolds na sua forma adimensional, equação (23), constitui-se na equação padrão para a solução de problemas associados a mancais radiais. Como esta equação não possui solução analítica, utilizar-se-á uma metodologia numérica de solução baseada no método dos volumes finitos e no uso de malhas não-ortogonais adaptadas à fronteira de cavitação.

O uso de malhas adaptadas à fronteira de cavitação, como descrito por Prata e Ferreira [25], visa a transformação de um domínio de solução de fronteira livre em um domínio fixo. Para tal faz-se

$$\theta_2 = \pi + \alpha \quad (26)$$

onde,

$$\alpha = f(p, y) \quad (27)$$

Note-se que a determinação de p está associada a α que por sua vez depende de p .

A transformação do domínio de fronteira livre em um domínio fixo é realizada pela introdução de uma nova coordenada espacial definida por,

$$\eta = \frac{\theta}{(\pi + \alpha)} \quad (28)$$

Redefinindo a coordenada y^* , de forma que,

$$\xi = y^* = y/R \quad (29)$$

tem-se a transformação do domínio de solução como apresentada na figura 7.

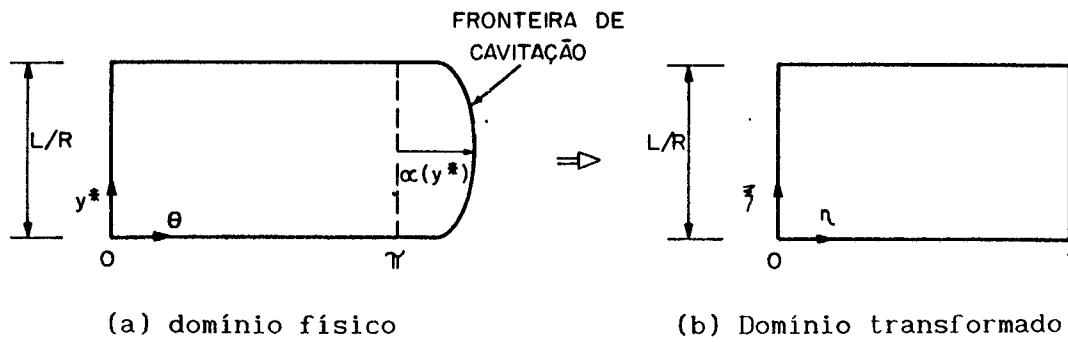


Figura 7 - Domínio de solução.

A partir da definição da nova coordenada (28) obtém-se, pelo uso da regra da cadeia, as seguintes derivadas parciais,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{y^*} = \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\xi} \left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|_{y^*} + \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\eta} \left. \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right|_{y^*} \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y^*} \right|_{\theta} = \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\xi} \left. \frac{\partial \eta}{\partial y^*} \right|_{\theta} + \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\eta} \left. \frac{\partial \xi}{\partial y^*} \right|_{\theta} \quad (31)$$

Mas,

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|_{y^*} = \frac{1}{(\pi + \alpha)} \quad (32)$$

e

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial y^*} \right|_{\theta} = - \frac{\theta}{(\pi + \alpha)^2} \frac{\partial \alpha(y^*)}{\partial y^*} \quad (33)$$

Como a variação da fronteira de cavitação na direção y^* é pequena quando comparada com os demais termos, conforme discutido em [25], pode-se desprezar a variação de η com y^* , dada pela equação (33). Assim sendo, tem-se,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{y^*} = \frac{1}{(\pi + \alpha)} \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\xi} \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y^*} \right|_{\theta} = \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\eta} \quad (35)$$

e,

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right|_{y^*} = \frac{1}{(\pi + \alpha)^2} \left. \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} \right|_{\xi} \quad (36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} \right|_{\theta} = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right|_{\eta} \quad (37)$$

Substituindo as equações (36) e (37) na equação (23) tem-se a equação de Reynolds para o domínio transformado,

$$\frac{1}{(\pi + \alpha)^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = A(\theta)\dot{\epsilon}^* + B(\theta)\dot{\psi}^* + C(\theta)P + D(\theta) \quad (38)$$

onde $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ e $D(\theta)$ são dados pelas equações (24), sendo que θ é agora definido por,

$$\theta = (\pi + \alpha)\eta \quad (39)$$

As condições de contorno associadas à equação (38) são,

$$i) P = 0 \quad \text{em} \quad \xi = 0 \quad (40a)$$

$$\text{ii) } \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \quad \text{em} \quad \xi = L/D \quad (40b)$$

$$\text{iii) } P = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 0 \quad (40c)$$

$$\text{iv) } P = \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 1 \quad (40d)$$

A integração da equação (38) fornece o campo de pressões para um mancal radial finito, em escoamento laminar, submetido a um carregamento dinâmico, com cavitação. Em secção subsequente será explorada a determinação de α .

2.2 FORMULAÇÃO TURBULENTA DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

Na construção do modelo teórico que resultou na equação de Reynolds conforme apresentado na seção anterior, foram utilizadas várias hipóteses simplificativas entre elas a que estabelece que o escoamento do fluido lubrificante era laminar.

Considerando-se a época em que este modelo foi proposto, em 1886, a hipótese de escoamento laminar era plenamente justificável: os óleos lubrificantes eram bastante viscosos e os eixos não atingiam rotações muito elevadas. Entretanto, com o crescente desenvolvimento industrial, as máquinas passaram a operar em regimes de alta rotação e tornou-se freqüente o uso de lubrificantes de baixa viscosidade.

Estas características tendem a tornar o escoamento turbulento, que, se por um lado implica no aumento da capacidade de carga do mancal, por outro lado provoca um acréscimo do atrito viscoso. Geralmente procura-se evitar o funcionamento do mancal em regime turbulento devido ao acréscimo de perdas mecânicas. Existe, no entanto, casos em que é desejado um aumento da capacidade de carga. Torna-se, então, necessário determinar a partir de que condições o escoamento deixa de ser laminar e, quando em regime turbulento, determinar

corretamente as características operacionais do mancal.

Os primeiros estudos realizados no sentido de determinar o ponto de transição de regime laminar em turbulento devem-se a G.I. Taylor que, em 1923, investigou o escoamento entre dois cilindros concêntricos. Para o caso em que o cilindro externo permanece estacionário e o interno rotaciona a uma velocidade constante, Taylor estabeleceu o seguinte critério a partir do qual surgem instabilidades no escoamento,

$$Re_c = \frac{\rho U c}{\mu} = 41,1 \left(\frac{R}{c} \right)^{1/2} \quad (41)$$

onde, Re_c \longrightarrow número de Reynolds crítico;
 ρ \longrightarrow massa específica do lubrificante;
 U \longrightarrow velocidade tangencial do cilindro interno;
 c \longrightarrow folga radial;
 μ \longrightarrow viscosidade do lubrificante;
 R \longrightarrow raio do eixo (ou do mancal);

Vários experimentos realizados posteriormente por Wilcock, Smith, e Fuller [2], entre outros, comprovaram os estudos de Taylor. Para o caso de cilindros dispostos excentricamente, observou-se que o número de Reynolds crítico (Re_c) aumenta com o acréscimo da excentricidade. Assim, o critério estabelecido pela equação (41) pode ser utilizado apenas como uma primeira aproximação.

Conhecidas as condições em que o escoamento passa a ser turbulento, é necessário o uso de um modelo capaz de determinar de forma precisa o comportamento do mesmo. Os escoamentos laminar e turbulento são descritos pelas mesmas equações, a saber, continuidade e Navier-Stokes. Entretanto, em regime turbulento, as escalas espacial e temporal necessárias para resolver-se estas equações são tão pequenas, que inviabilizam a obtenção da solução. Assim, uma aproximação estatística é utilizada e, como sugerido por Reynolds, os valores instantâneos da velocidade e da pressão são separados em valores médios e

flutuações, ou seja,

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (42a)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (42b)$$

onde os valores médios são definidos por,

$$\bar{u}_i = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} u_i dt \quad (43a)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} p dt \quad (43b)$$

sendo que o intervalo de tempo $(t_2 - t_1)$ é grande quando comparado com a escala de tempo das flutuações turbulentas.

Introduzindo as equações (42) nas equações de Navier-Stokes e da continuidade obtém-se, após uma média no tempo na forma indicada pelas equações (43),

* equação da continuidade,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (44)$$

* equação de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (45)$$

onde o termo $\overline{u_i u_j}$ atua como uma tensão no fluido, sendo chamado de tensor de Reynolds ou tensor tensão turbulento. Os vários modelos turbulentos diferem na aproximação utilizada na determinação deste tensor.

Na literatura encontram-se diversos trabalhos que tratam da modelação matemática do escoamento turbulento em mancais hidrodinâmicos. Pelas características do escoamento, que sofre forte influência das paredes e não possui regiões de recirculação, os modelos classificados como sendo de zero equações aplicam-se de forma satisfatória ao problema em questão.

Nos modelos de zero equações, a turbulência é modelada em termos de equações algébricas em vez de equações diferenciais parciais, como ocorre com modelos mais complexos e genéricos. Esta característica confere relativa simplicidade na resolução do modelo.

Entre os modelos de zero equações freqüentemente utilizados na lubrificação hidrodinâmica, destacam-se o de difusividade de vórtices constante e o modelo de comprimento de mistura de Prandtl.

O modelo de comprimento de mistura, proposto por Prandtl em 1925, foi o primeiro modelo turbulento a ser proposto e assume que a viscosidade turbulenta é proporcional a uma flutuação média de velocidade, \hat{V} , e a um "comprimento de mistura" l_m .

A viscosidade turbulenta μ_t , ao contrário da viscosidade molecular μ , não é uma propriedade do fluido mas depende do estado de turbulência do escoamento; μ_t pode variar de forma significativa de um ponto a outro no escoamento e também de um escoamento para outro.

A simplicidade do modelo de comprimento de mistura deve-se à hipótese assumida na determinação de μ_t ,

$$\mu_t = \rho l_m \hat{V} \quad (46)$$

sendo que,

$$\hat{V} = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (47)$$

onde o comprimento de mistura l_m é especificado por fórmulas empíricas simples.

Este empirismo na determinação de constantes, característica dos modelos de zero equações, torna-os bastante específicos.

Wada e Hashimoto [16] apresentam uma equação para a lubrificação hidrodinâmica em regime turbulento na qual os coeficientes turbulentos foram obtidos a partir de resultados experimentais. Como o escoamento em mancais hidrodinâmicos consiste na combinação de escoamentos de Couette e de Poiseuille, estes escoamentos foram analisados separadamente e, posteriormente, aplicados às equações da lubrificação através da introdução de um conceito de escoamento equivalente.

A equação de Reynolds modificada para o escoamento turbulento apresentada em [16], possui o mesmo formato daquela para o escoamento laminar, havendo apenas a inclusão dos coeficientes turbulentos. O desenvolvimento apresentado no apêndice E mostra que a introdução das adimensionalizações e da transformação de coordenadas, utilizadas na seção anterior, não afetam a forma final da equação.

Tem-se, portanto, a seguinte forma para a equação de Reynolds modificada para o escoamento turbulento,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\pi+\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_{\eta} (1+\epsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1+\epsilon \cos \theta)^{-3/2} P \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ G_{\xi} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\} = 2\ddot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\ddot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \end{aligned} \quad (48)$$

onde os coeficientes turbulentos, aproximados para uma forma simplificada por Hashimoto e Wada [17], são,

$$G_{\eta} = \frac{1}{a_{\eta} + b_{\eta} \epsilon \cos \theta} \quad (49a)$$

$$G_{\xi} = \frac{1}{a_{\xi} + b_{\xi} \epsilon \cos \theta} \quad (49b)$$

onde,

$$a_{\eta} = 1 + 0,00069 \text{ Re}^{0,95} \quad (50a)$$

$$b_{\eta} = 0,00066 \text{ Re}^{0,95} \quad (50b)$$

$$a_{\xi} = 1 + 0,00069 \text{ Re}^{0,88} \quad (50c)$$

$$b_{\xi} = 0,00061 \text{ Re}^{0,88} \quad (50d)$$

e

$$\text{Re} = \frac{\rho U_c}{\mu} \quad (51)$$

A equação (48) é a equação de Reynolds para um mancal radial finito, em escoamento turbulento, submetido a um carregamento dinâmico, com cavitação.

Observa-se que a equação de Reynolds para escoamento laminar (38) pode ser obtida a partir da equação (48) fazendo-se,

$$\text{Re} = 0 \longrightarrow G_{\eta} = G_{\xi} = 1$$

Ainda, obtém-se a equação de Reynolds para carregamento estático a partir da equação (48) fazendo-se,

$$\ddot{\epsilon}^* = \dot{\psi}^* = \omega_L^* = 0$$

2.3 DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DA FRONTEIRA DE CAVITAÇÃO

O fenômeno da cavitação do óleo lubrificante é uma das características dos mancais radiais que já mereceu muita atenção dos estudiosos da lubrificação hidrodinâmica.

Este fenômeno ocorre em uma determinada posição a jusante do ponto de

espessura mínima do filme de óleo, e a necessidade de determinar corretamente esta posição decorre do fato do óleo lubrificante não possuir mais a capacidade de suportar carga na região posterior a ela.

Portanto, o campo de pressões de interesse desenvolve-se entre o ponto de alimentação de óleo e a fronteira de cavitação. Estes são os limites do domínio de solução da equação de Reynolds na direção circunferencial.

A cavitação do óleo está associada ao fato da cavidade formada entre o eixo e o mancal tornar-se divergente a partir do ponto de folga mínima (h_{\min}) em $\theta = \pi$. Como a área associada à vazão de óleo aumenta gradativamente a partir deste ponto, em determinada posição o óleo existente não é suficiente para escoar na forma de um filme contínuo, passando a escoar em estrias. A fronteira de cavitação é definida como sendo a linha que separa a região de filme contínuo daquela de filme estriado. Pinkus [6] apresenta alguns resultados experimentais realizados com mancais de acrílico onde observa-se, de forma detalhada, a fronteira de cavitação.

Na figura 8 é apresentado, em uma vista planificada, um esboço do filme de óleo em um mancal radial operando em regime estático. O uso de um domínio de solução como aquele apresentado na figura 7(a) baseia-se na região de filme contínuo existente no intervalo de $\theta = 0$ a $\theta = (\pi + \alpha)$. Esta última posição representa a fronteira de cavitação.

Apesar de Reynolds, já em 1886, ter previsto a ocorrência da cavitação do óleo, a solução dos modelos matemáticos que incluíssem esta característica só foi possível recentemente com o uso dos métodos numéricos. Até então os modelos necessitavam de simplificações para que fosse possível a resolução das equações pelos métodos analíticos.

Estas simplificações consistiam no uso de modelos unidimensionais nos quais a cavitação era desconsiderada, como ocorre com as condições de Sommerfeld e meio-Sommerfeld.

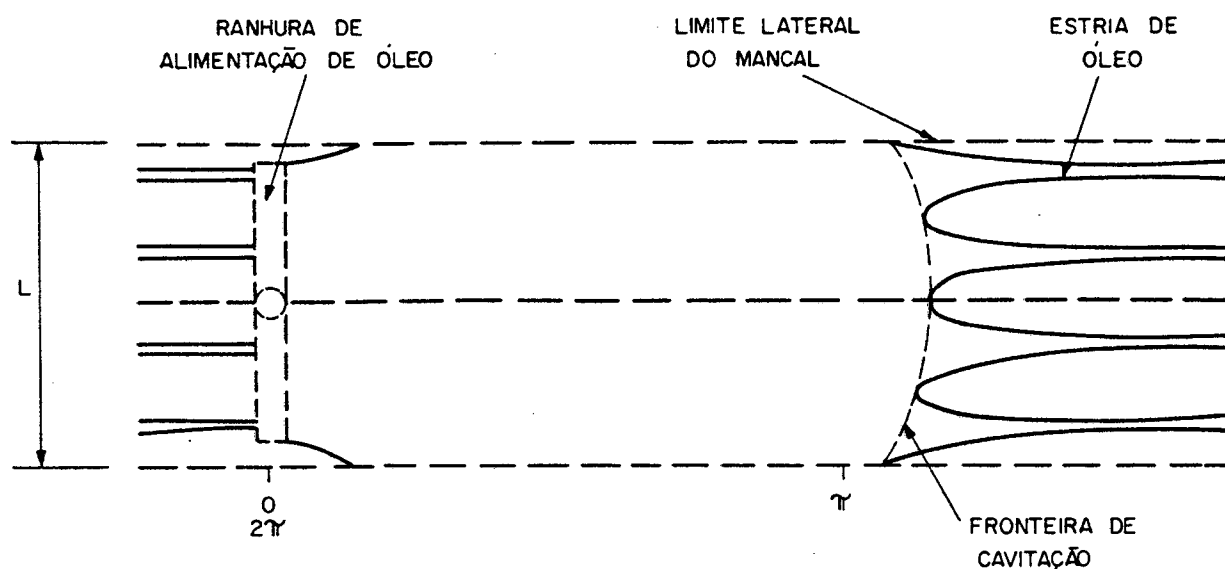


Figura 8 - Vista planificada do mancal radial

Sommerfeld, em 1904, ao propor o modelo unidimensional de mancal longo, sugeriu o uso de uma periodicidade na condição de contorno da forma,

$$p(0) = p(2\pi) \quad (52a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta}(0) = \frac{\partial p}{\partial \theta}(2\pi) \quad (52b)$$

Entretanto, o perfil de pressão obtido pelo uso desta condição apresenta uma distribuição antissimétrica em relação a $\theta = \pi$, com pressões negativas iguais às positivas, como mostra a figura 9. Observa-se que o uso da condição de Sommerfeld gera uma inconsistência física, já que em um mancal hidrodinâmico as pressões atingem valores positivos da ordem de centenas de atmosferas, e a solução fornece valores de pressões absolutas negativas da mesma ordem.

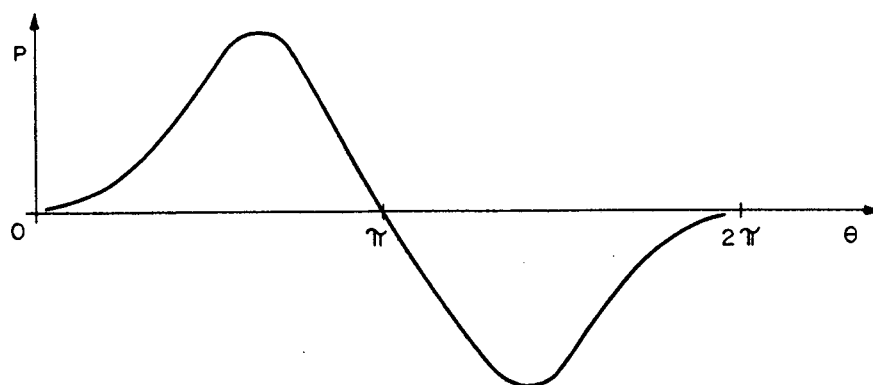


Figura 9 - Distribuição de pressão para a condição de Sommerfeld

Outra condição de contorno, devida a Ocvirk mas conhecida como condição de meio-Sommerfeld, admite que o filme de óleo termina em $\theta = \pi$, e que,

$$p = 0 \quad \text{em} \quad \theta = \pi \quad (53)$$

O uso da condição de contorno anterior elimina a inconsistência das pressões negativas obtidas na condição de Sommerfeld, já que, a partir de $\theta = \pi$, considera-se que a pressão é sempre zero, como sugere a figura 10.

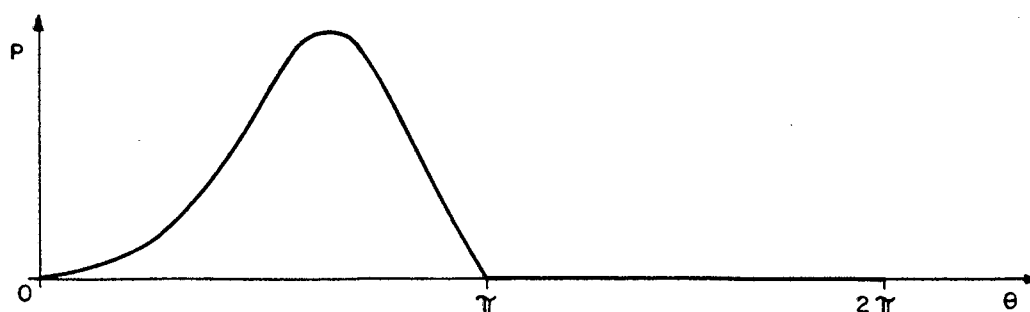


Figura 10 - Distribuição de pressão para a condição de meio-Sommerfeld

A condição de meio-Sommerfeld associada ao modelo unidimensional de mancal curto é utilizada com frequência ainda hoje em dia. Tal fato é justificado pela sua simplicidade e precisão satisfatória dos resultados.

Entretanto, ao considerar-se a cavitação, estudos como o realizado por

Savage [24] mostram que a condição de contorno proposta por Reynolds,

$$p = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{em} \quad \theta = \theta_2 \quad (54)$$

é a que melhor representa a situação física.

Verificada através de inúmeros experimentos, a distribuição real de pressão em um mancal possui a forma apresentada na figura 11. Observa-se pela figura a validade da condição de contorno de Reynolds, sendo que a única dificuldade em considerar-se a cavitação está na determinação da posição θ_2 .

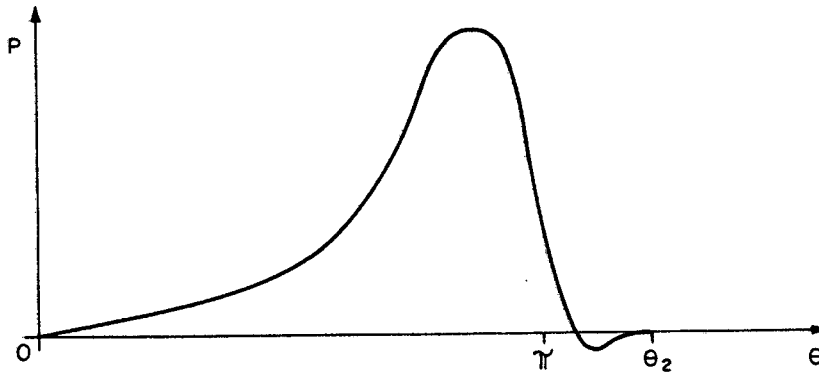


Figura 11 - Distribuição de pressão real em um mancal radial

Como a continuidade do filme de óleo deixa de existir a partir da fronteira de cavitação, esta se torna a linha limítrofe em que a equação da continuidade pode ser utilizada. Assim, o uso desta equação, dada por,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (55)$$

juntamente com a condição (54), fornece a posição exata da fronteira de cavitação, $\theta_2(\xi)$.

Em seção posterior será apresentado um modelo numérico em que, em cada volume de controle adjacente à fronteira de cavitação, será imposta a condição

de continuidade. A partir deste procedimento obtém-se as equações necessárias à determinação de $\theta_2(\xi)$.

Observa-se que a posição da fronteira de cavitação está diretamente relacionada à geometria do mancal e às suas condições de operação, já que as velocidades u e v , presentes na equação (55), são oriundas dos gradientes de pressão existentes no mancal, sendo que estes são obtidos a partir daquelas características geométricas e operacionais.

2.4 DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA TRAJETÓRIA DO EIXO

As equações para a determinação da trajetória do eixo são obtidas através do uso dos conceitos de dinâmica para o movimento do eixo. Este movimento é devido ao desequilíbrio existente entre o carregamento aplicado ao eixo e a força hidrodinâmica gerada no mancal.

A trajetória desenvolvida pelo eixo está diretamente relacionada às características do carregamento. Este pode abranger o seguinte conjunto de combinações relativas à magnitude e direção da carga,

- i) magnitude e direção constantes;
- ii) magnitude constante e direção variável;
- iii) magnitude variável e direção constante;
- iv) magnitude e direção variáveis.

Considerando que existe um balanceamento perfeito das partes em rotação, o tipo de carregamento (i) fornecerá, no caso de um mancal estável, uma trajetória helicoidal do centro do eixo. A posição de equilíbrio do eixo será a mesma que aquela fornecida pelo modelo de carregamento estático.

O tipo de carregamento (iv), ao qual estão submetidos os mancais e moentes do eixo de manivelas de uma máquina alternativa, é o mais geral dos carregamentos. A trajetória descrita pelo eixo assume as mais variadas formas, todas com uma característica comum: a periodicidade.

A princípio, para todos os tipos de carregamento dinâmico apresentados anteriormente, as equações da trajetória podem ser obtidas através de um balanço de forças em que é considerada a inércia do eixo. Entretanto, nas máquinas alternativas, as forças de inércia das peças móveis, em conjunto com as forças devido a expansão ou compressão dos gases nos cilindros, assumem valores bastante superiores à massa do eixo, de forma que esta pode ser desprezada no balanço de forças. Nas seções seguintes serão apresentadas as duas formulações, a que considera e a que desconsidera a massa do eixo no balanço de forças.

2.4.1 Trajetória considerando a massa do eixo

Ao considerar-se que a massa do eixo possui um valor em ordem de grandeza comparável ao carregamento, a inércia do eixo terá influência significativa na trajetória do seu centro.

Um balanço das forças atuantes no eixo obedece a segunda Lei de Newton,

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a} \quad (56)$$

Para o sistema de coordenadas (1,2), apresentado na figura 12, tem-se, segundo o Apêndice F,

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 e}{dt^2} - e \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right] \hat{e}_1 + \left[e \frac{d^2 \beta}{dt^2} + 2 \frac{de}{dt} \frac{d\beta}{dt} \right] \hat{e}_2 \quad (57)$$

onde,

$$\beta = \gamma_w - \psi \quad (58)$$

Decompondo a equação (57) para cada direção tem-se,

direção \hat{e}_1 :

$$W \cos \psi + F_1 + C \cos \Lambda = \frac{C}{g} \left[\frac{d^2 e}{dt^2} - e \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right] \quad (59a)$$

direção \hat{e}_2 :

$$W \sin \psi + F_2 + C \sin \Lambda = \frac{C}{g} \left[e \frac{d^2 \beta}{dt^2} + 2 \frac{de}{dt} \frac{d\beta}{dt} \right] \quad (59b)$$

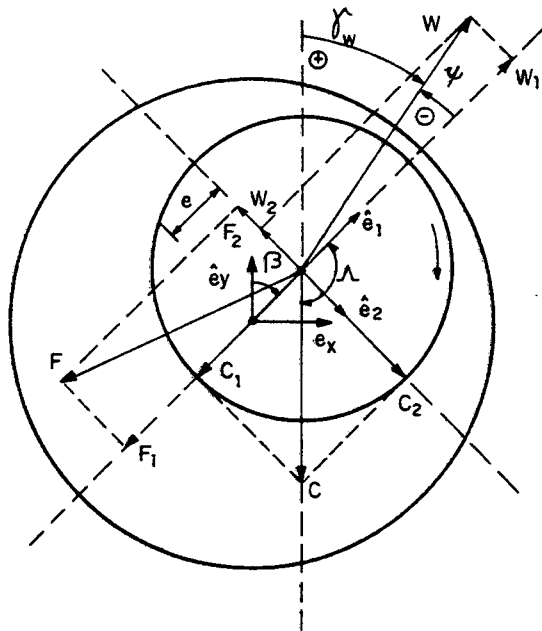


Figura 12 - Balanço de forças considerando a massa do eixo.

Para a adimensionalização das equações anteriores uso é feito das seguintes definições,

$$W^* = \frac{c^2}{\mu U R^2 L} W \quad (60a)$$

$$F^* = \frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) \frac{c^2}{\mu U R^2 L} F \quad (60b)$$

$$C^* = \frac{c^2}{\mu U R^2 L} C \quad (60c)$$

$$G = \frac{U^2 c}{R^2 g} \quad (60d)$$

$$\tau = \omega t \quad (60e)$$

$$\epsilon = \frac{e}{c} \quad (60f)$$

Substituindo as equações (60a) a (60f), nas equações (59a) e (59b), tem-se, respectivamente,

$$\ddot{\epsilon} - \epsilon \dot{\beta}^2 = A \left(\frac{W}{C} \cos \psi + \cos \Lambda \right) + B F_1^* \quad (61a)$$

$$\epsilon \ddot{\beta} + 2 \dot{\epsilon} \dot{\beta} = A \left(\frac{W}{C} \sin \psi + \sin \Lambda \right) + B F_2^* \quad (61b)$$

onde,

$$A = \frac{1}{G} \quad (62a)$$

$$B = \frac{6}{C^* G(L/R)} \quad (62b)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (62c)$$

$$\ddot{\epsilon} = \frac{d^2 \epsilon}{d\tau^2} \quad (62d)$$

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{d\tau} \quad (62e)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{d^2 \beta}{d\tau^2} \quad (62f)$$

As componentes adimensionais da força hidrodinâmica F_1^* e F_2^* , são obtidas a partir da integração do campo de pressões fornecida pela equação de Reynolds, ou seja,

$$F_1^* = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P}{H^{3/2}} \cos[(\pi+\alpha)\eta] (\pi+\alpha) d\eta d\xi \quad (63a)$$

$$F_2^* = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P}{H^{3/2}} \sin[(\pi+\alpha)\eta] (\pi+\alpha) d\eta d\xi \quad (63b)$$

Para o caso particular em que o carregamento é constante e aplicado para baixo, pode-se considerar a soma do peso do eixo C_p^* com o carregamento W_v^* como sendo o peso total do eixo. Para este caso, no sistema de equações (61) tem-se,

$$C^* = C_p^* + W_v^* \quad (64a)$$

$$W^* = 0 \quad (64b)$$

$$\Lambda = \psi \quad (64c)$$

e portanto,

$$\ddot{\epsilon} - \epsilon \dot{\beta}^{*2} = A \cos \psi + B F_1^* \quad (65a)$$

$$\epsilon \ddot{\beta} + 2 \dot{\epsilon} \dot{\beta}^* = A \sin \psi + B F_2^* \quad (65b)$$

2.4.2 Trajetória desconsiderando a massa do eixo

Nos casos em que a massa do eixo pode ser desprezada por ser comparativamente pequena em relação ao carregamento aplicado, o balanço de forças torna-se uma igualdade entre a força hidrodinâmica e o carregamento. Assim,

$$F_r = F + W = 0 \quad (66)$$

como pode ser observado na figura 13.

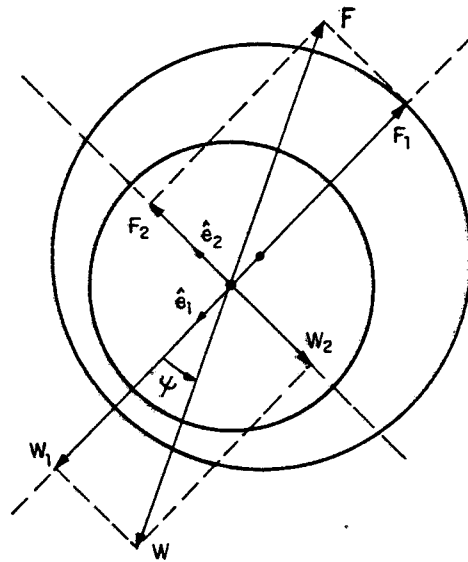


Figura 13 - Balanço de forças desconsiderando a massa do eixo.

Utilizando-se as mesmas variáveis adimensionais introduzidas em (60), obtém-se as seguintes expressões para as direções ao longo e normal à linha de centros,

direção \hat{e}_1 :

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \cos \psi + F_1^* = 0 \quad (67a)$$

direção \hat{e}_2 :

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \sin \psi + F_2^* = 0 \quad (67b)$$

Estas mesmas equações podem ser obtidas das equações (59) fazendo $C = 0$.

3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A equação de Reynolds na sua forma bidimensional, representada pelas equações (38) e (48), é uma equação diferencial parcial, não homogênea, com coeficientes variáveis. A complexidade desta equação, por si só, não permite a obtenção de uma solução analítica. Adicionalmente, a necessidade do uso de uma equação particular para a determinação da fronteira de cavitação, aumenta a complexidade do problema hidrodinâmico, devido às não-linearidades associadas a estas duas equações.

Desta forma, torna-se necessário o uso de uma metodologia numérica que, através do uso de pontos discretos no domínio de solução, seja capaz de fornecer uma solução aproximada da equação de Reynolds.

A metodologia numérica, a ser adotada neste trabalho, é baseada no método dos volumes finitos [27], por ser este, reconhecidamente, um método eficiente na solução de problemas cujas equações apresentam um alto grau de não-linearidades.

Outros métodos numéricos tem sido utilizados na solução da equação de Reynolds, como o de elementos finitos [28], no qual as não-linearidades podem ser tratadas pelo uso do método de Galerkin.

A discretização do domínio de solução origina um sistema de equações algébricas que serão resolvidas através de um processo iterativo. Entretanto,

quando o carregamento é dinâmico, o processo iterativo para convergência deste sistema de equações é repetido para cada instante de tempo considerado.

A forma de se avançar no tempo requer a solução das equações da trajetória (61), que fornecem a posição e as velocidades do eixo para o instante seguinte ao considerado.

O sistema de equações (61) é comumente resolvido pelo método de Euler. Entretanto, outras metodologias podem ser utilizadas, como será visto posteriormente.

3.1 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

Conforme observação feita no item 2.2, a partir da equação de Reynolds para carregamento dinâmico em formulação turbulenta (48), é possível obter as equações em formulação laminar e para o carregamento estático estabelecendo-se valores particulares para determinadas variáveis da equação.

Devido a esta generalidade, a equação (48) torna-se a ferramenta principal na determinação das características operacionais de mancais submetidos a qualquer tipo de carregamento.

Desta forma, o método numérico dos volumes finitos será aplicado à equação (48), pelo qual obter-se-á um campo de pressão discretizado, ponto de partida para a análise do desempenho de mancais radiais.

Como já havia sido comentado, o modelo numérico requer a discretização do domínio de solução em um número finito de pequenos volumes de controle. As faces de um volume de controle típico, como ilustrado na figura 14, são comuns aos seus volumes vizinhos ou à fronteira do domínio, de forma a não haver sobreposição dos mesmos.

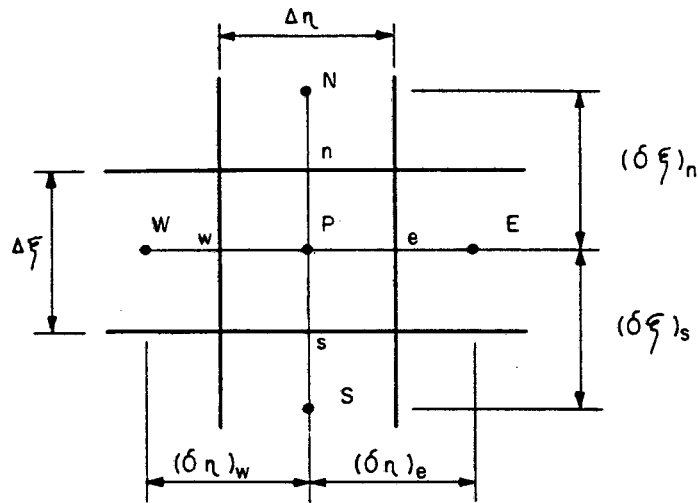


Figura 14 - Volume de controle típico do processo de solução.

Definidos os parâmetros geométricos associados à discretização do domínio de solução (malha), a equação de Reynolds (48) é então integrada ao longo de cada um destes volumes de controle, obtendo-se, para cada ponto discreto do domínio, uma equação algébrica da forma,

$$a_p P = a_e P_e + a_w P_w + a_n P_n + a_s P_s + S \quad (68)$$

onde, conforme dedução apresentada no Apêndice G, tem-se,

$$a_e = a_{e1} + a_{e2} \quad (69a)$$

$$a_{e1} = G_\eta \bigg|_e \frac{(1 + \epsilon \cos \theta|_e)^{3/2}}{(\delta \eta)_e} \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)^2} \quad (69b)$$

$$a_{e2} = \frac{3}{4} G_\eta \bigg|_e (1 + \epsilon \cos \theta|_e)^{1/2} \epsilon \sin \theta|_e \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)} \quad (69c)$$

$$a_w = a_{w1} - a_{w2} \quad (69d)$$

$$a_{w1} = G_{\eta} \Big|_w \frac{(1+\epsilon \cos \theta|_w)^{3/2}}{(\delta \eta)_w} \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)^2} \quad (69e)$$

$$a_{w2} = \frac{3}{4} G_{\eta} \Big|_w (1+\epsilon \cos \theta|_w)^{1/2} \epsilon \sin \theta|_w \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)} \quad (69f)$$

$$a_n = G_{\xi} \Big|_p \frac{(1+\epsilon \cos \theta|_p)^{3/2}}{(\delta \xi)_n} \Delta \eta \quad (69g)$$

$$a_s = G_{\xi} \Big|_p \frac{(1+\epsilon \cos \theta|_p)^{3/2}}{(\delta \xi)_s} \Delta \eta \quad (69h)$$

$$a_p = a_{e1} - a_{e2} + a_{w1} + a_{w2} + a_n + a_s \quad (69i)$$

$$S = - \left[2 \dot{\epsilon}^* \cos \theta - 2 \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2 \omega_L^* - 1) \right] \Big|_p \Delta \eta \Delta \xi \quad (69j)$$

Observa-se que, ao invés de uma solução continua da equação diferencial, o uso dos métodos numéricos gera soluções apenas para os pontos em consideração. Conseqüentemente, o uso de malhas mais refinadas fornece resultados mais precisos. No entanto, a escolha da malha requer uma análise comparativa entre precisão de resultados e custo computacional, visto que, quanto maior for o refinamento da malha, maior será o tempo computacional gasto na solução do problema.

O sistema das equações algébricas, associadas a cada um dos volumes de controle, é resolvido iterativamente, através do método linha por linha (MLPL). A essência deste método caracteriza-se pelo uso do algoritmo TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm), que é aplicado a cada bloco (linha ou coluna) individualmente. A cada iteração realiza-se quatro varreduras, em sentidos alternados, no domínio de solução, de forma a transportar, de maneira mais eficaz, as informações contidas nas fronteiras do domínio.

Observa-se pelas equações (69), a necessidade de conhecer-se a posição

da fronteira de cavitação $\alpha(\xi)$ para se determinar o campo de pressões que, por sua vez, é função deste parâmetro. Da mesma forma, a determinação da fronteira de cavitação $\alpha(\xi)$ é função do campo de pressões, o que torna o problema não-linear.

A equação para a determinação da fronteira de cavitação é apresentada a seguir, e mais a frente é descrita a metodologia utilizada para contornar a não-linearidade associada à equação de Reynolds.

3.2 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DA FRONTEIRA DE CAVITAÇÃO

Para discretizar a equação de Reynolds é necessário que o domínio de solução seja dividido em um número finito de volumes de controle não sobrepostos. Como a fronteira de cavitação delimita a região de filme contínuo, sua correta localização será determinada através de um controle sobre a vazão mássica em cada um dos volumes de controle adjacentes a esta fronteira.

No domínio transformado (η, ξ) sabe-se que a fronteira de cavitação está localizada na coordenada $\eta=1$. Entretanto, no domínio físico (θ, y) sua localização é estabelecida pelo parâmetro $\alpha(y)$, conforme apresentado na figura 7(a).

Pela metodologia descrita a seguir, o parâmetro $\alpha(y)$ será determinado a partir de um balanço de massa realizado em cada um dos volumes de controle adjacentes à fronteira de cavitação. Este procedimento fornece uma equação de $\alpha(y)$ para cada coordenada y (ou ξ) em consideração.

De acordo com a figura 15, na qual é apresentado um volume de controle típico, adjacente à fronteira de cavitação, um balanço de massa fornece,

$$Q_w^* + Q_s^* = Q_n^* + Q_e^* + \dot{V}^* \quad (70)$$

ou

$$q_{\eta}^* \Big|_w \Delta \xi + q_{\xi}^* \Big|_s (\pi + \alpha) \Delta \eta = q_{\xi}^* \Big|_n (\pi + \alpha) \Delta \eta + q_{\eta}^* \Big|_e \Delta \xi + \frac{\partial}{\partial \tau} [H(\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi] \Big|_p \quad (71)$$

onde $H = h/c$.

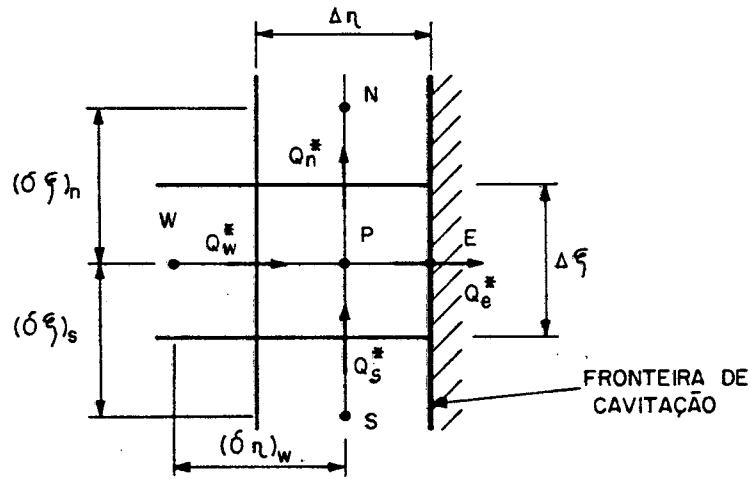


Figura 15 - Volume de controle típico adjacente à fronteira de cavitação.

Os termos q_{η}^* e q_{ξ}^* são vazões adimensionais nas faces perpendiculares às direções η e ξ , respectivamente, dadas por,

$$q_{\eta}^* = A - G_{\eta} A^{1/2} \left[\frac{A}{(\pi + \alpha)} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{3}{2} BP \right] \quad (72)$$

e,

$$q_{\xi}^* = -G_{\xi}^{-3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (73)$$

e $\dot{V} = \partial[H(\pi + \alpha)\Delta\eta\Delta\xi]/\partial\tau$ refere-se à variação no tempo do volume de controle devido à presença de filme espremido e ao movimento da fronteira de cavitação.

De acordo com o Apêndice H, tem-se que,

$$\dot{V} = (q_5^* + q_6^*) \Delta \xi \quad (74)$$

onde,

$$q_5^* = 2 \left[\dot{\epsilon} \cos \theta + \epsilon \sin \theta \left(\omega_L^* - \dot{\psi}^* \right) \right] (\pi + \alpha) \Delta \eta \quad (75)$$

e,

$$q_6^* = 2 A_p \Delta \eta \ddot{\alpha}^* \quad (76)$$

Fazendo uso das equações (72) a (76), a equação (71) pode ser escrita na seguinte forma,

$$q_1^* \Delta \xi + q_2^* (\pi + \alpha) \Delta \eta = q_3^* (\pi + \alpha) \Delta \eta + q_4^* \Delta \xi + (q_5^* + q_6^*) \Delta \xi \quad (77)$$

onde,

$$q_1^* = A_w - G_\eta \left| A_w^{1/2} \left[\frac{A_w}{(\pi + \alpha)} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] + \frac{3}{2} B_w P_w \right| \quad (78a)$$

$$q_2^* = -G_\xi \left| A_s^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_s \quad (78b)$$

$$q_3^* = -G_\xi \left| A_n^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_n \quad (78c)$$

$$q_4^* = 1 - \epsilon \cos \alpha \quad (78d)$$

$$q_5^* = 2 \left[\dot{\epsilon}^* \cos \theta \right]_p + \epsilon \sin \theta \left| \left(\omega_L^* - \dot{\psi}^* \right) \right|_p (\pi + \alpha) \Delta \eta \quad (78e)$$

$$q_6^* = 2 A_p \ddot{\alpha}^* \Delta \eta \quad (78f)$$

e,

$$A_* = 1 + \epsilon \cos \theta \Big|_* \quad (78g)$$

$$B_* = \epsilon \sin \theta \Big|_* \quad (78h)$$

$$\theta \Big|_* = (\pi + \alpha) \eta \Big|_* \quad (78i)$$

As derivadas primeiras da pressão são aproximadas numericamente por

diferenças centrais, na seguinte forma,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_w = \frac{P_P - P_w}{(\delta \eta)_w} \quad (79a)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_s = \frac{P_P - P_s}{(\delta \xi)_s} \quad (79b)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_n = \frac{P_N - P_P}{(\delta \xi)_n} \quad (79c)$$

e a pressão na face oeste por,

$$P_w = \frac{P_P + P_w}{2} \quad (79d)$$

No termo q_4^* , que se refere à vazão através da fronteira de cavitação, já está incorporada a condição de contorno para esta fronteira, ou seja,

$$P = \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \quad (80)$$

Observa-se que a variável $\alpha(y)$, a ser determinada, encontra-se de forma implícita na equação (77). Uma maneira de obter-se o valor de α a partir desta equação, é através de um método iterativo no qual o termo que contém as informações mais "fortes" sobre o comportamento de α de um instante para outro é isolado, e os demais termos são mantidos em um termo fonte a serem avaliados com o valor de α da iteração anterior. O processo iterativo é repetido até atingir-se a convergência de α . Diferentes metodologias, utilizando esta formulação explícita, serão apresentadas a seguir e seus resultados avaliados e comparados posteriormente. Tais metodologias serão denominadas de método Estático, de Euler, e Simi-Implicito.

Obtida a equação para a determinação de α , o processo iterativo é realizado de forma idêntica para cada um dos volumes de controle adjacentes à

fronteira de cavitação. Para os pontos localizados nas fronteiras $\xi=0$ e $\xi=L/D$ o tratamento é diferenciado, conforme detalhado a seguir.

Para a fronteira $\xi=0$, ponto 1, o valor de α será obtido a partir de uma extrapolação linear dos valores de α dos dois volumes seguintes, 2 e 3, como apresentado na figura 16. De acordo com a nomenclatura da figura 16 tem-se,

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{(\delta\xi)_2}{(\delta\xi)_3} (\alpha_3 - \alpha_2) \quad (81)$$

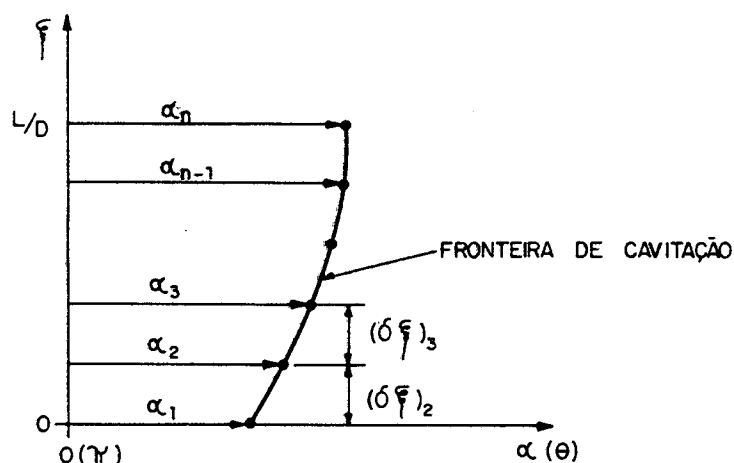


Figura 16 - Perfil α ao longo da fronteira de cavitação.

Para a fronteira $\xi=L/D$, ponto n, pela simetria, faz-se.

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \quad (82)$$

Na figura 17 é apresentado um fluxograma computacional que mostra o tratamento dado ao acoplamento das equações de Reynolds e da fronteira de cavitação.

O loop mais interno, que realiza o cálculo do campo de pressões, é necessário para que haja uma melhor convergência do método. Observa-se que para o caso de carregamento estático, o programa encerra após atingida a

convergência. No caso de carregamento dinâmico, este procedimento é realizado para cada instante de tempo considerado, até que o eixo atinja o regime permanente.

3.2.1 Método Estático

Pela técnica apresentada anteriormente, uma equação para a fronteira de cavitação na forma explícita pode ser obtida isolando-se α presente no termo q_4^* da equação (77). Segue-se que,

$$\alpha^{n+1} = \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[1 - q_1^* + q_5^* + q_6^* + (q_3^* - q_2^*) (\pi + \alpha) \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \right] \right\}^n \quad (83)$$

onde todos os termos do lado direito da equação são avaliados com o valor de α da iteração anterior. No termo q_6^* , dado pela equação (78f), o valor de $\dot{\alpha}^*$ será obtido pela aproximação de Euler,

$$\dot{\alpha}^* = \frac{\alpha^{\tau+\Delta\tau} - \alpha^{\tau}}{\Delta\tau} \quad (84)$$

onde $\alpha^{\tau+\Delta\tau}$ é atualizado a cada iteração, enquanto α^{τ} permanece constante e igual ao valor do instante de tempo anterior ao considerado.

Esta técnica mostrou-se eficiente para o carregamento estático [25], para o qual $q_5^* = q_6^* = 0$. Nas avaliações realizadas para o carregamento dinâmico, mostrou-se deficiente, motivo pelo qual adotou-se o nome de método estático.

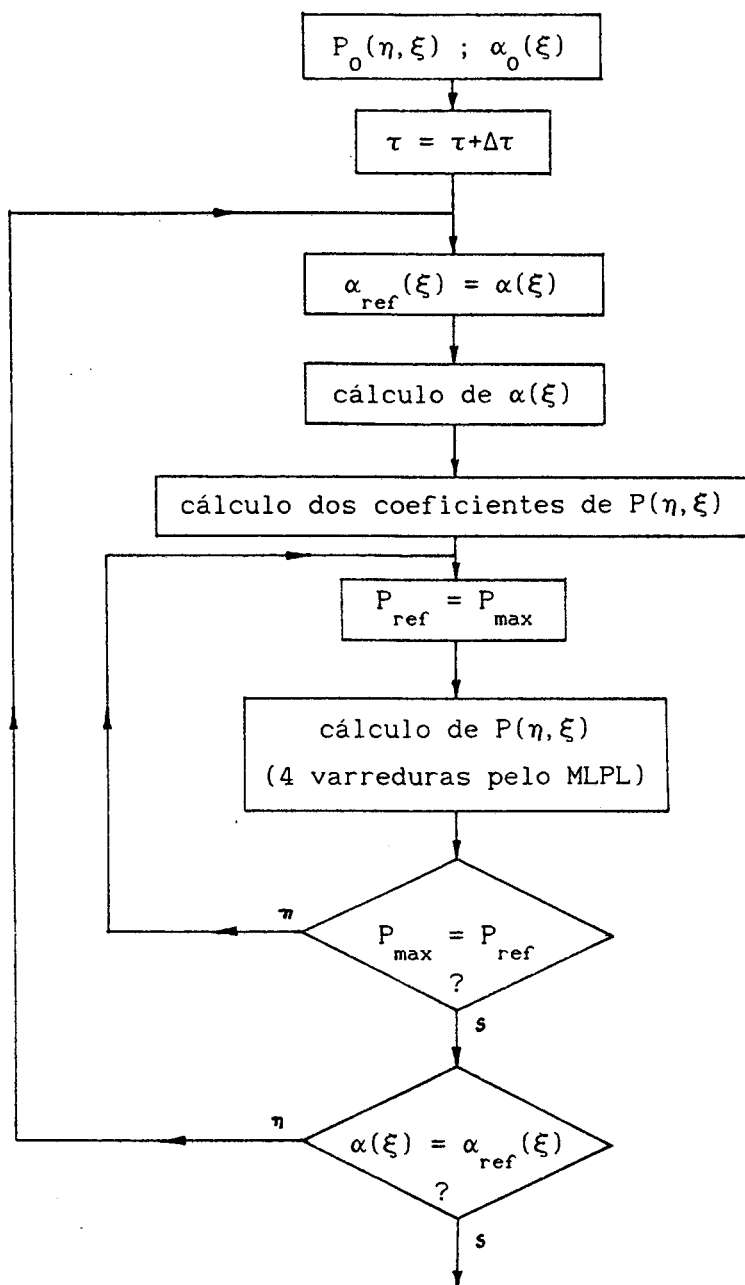


Figura 17 - Fluxograma computacional do acoplamento das equações de Reynolds e da fronteira de cavitação.

3.2.2 Método de Euler

Este método é uma variação do anterior, no qual a equação explícita para α será obtida através do termo q_6^* .

Isolando q_6^* na equação (77) e utilizando o método de Euler na avaliação da taxa de variação de α com o tempo, dado pela equação (84),

obtém-se,

$$\alpha^{n+1} = \alpha^\tau + \frac{\Delta\tau}{2A_p} \left[\frac{(q_1^* - q_4^* - q_5^*)}{\Delta\eta} + \frac{(q_2^* - q_3^*)(\pi + \alpha)}{\Delta\xi} \right]^n \quad (85)$$

De forma semelhante àquela adotada no método estático, os termos presentes no lado direito da equação são avaliados com o valor de α da iteração, com exceção de α^τ , que permanece constante e igual ao valor do instante de tempo anterior ao considerado.

3.2.3 Método Semi-Implicito

Ao contrário das equações (83) e (85), nas quais utilizou-se uma formulação explícita, pode-se obter uma equação para o cálculo da fronteira de cavitação utilizando-se uma formulação semi-implícita.

A equação a ser determinada por este método admite que α , presente nos termos q_4^* e q_6^* , neste último utilizando a aproximação de Euler, seja considerado no mesmo instante de tempo $\tau + \Delta\tau$. Desta forma obtém-se, a partir da equação (77),

$$\alpha^{\tau+\Delta\tau} = \frac{D(\alpha)/\Delta\xi + \epsilon \cos \alpha^{\tau+\Delta\tau} - 1}{2A_p \Delta\eta} \quad (86)$$

onde,

$$D(\alpha) = (q_1^* - q_5^*)\Delta\xi + (q_2^* - q_3^*)(\pi + \alpha)\Delta\eta \quad (87)$$

Fazendo agora,

$$\cos \alpha^{\tau+\Delta\tau} = \cos(\alpha^\tau + \alpha^{\tau+\Delta\tau} \Delta\tau) \quad (88a)$$

e, por considerações trigonométricas,

$$\cos \alpha^{\tau+\Delta\tau} = \cos(\alpha^{\tau}) \cos(\ddot{\alpha}^* \Delta\tau) - \sin(\alpha^{\tau}) \sin(\ddot{\alpha}^* \Delta\tau) \quad (88b)$$

e aproximando $\cos(\ddot{\alpha}^* \Delta\tau)$ e $\sin(\ddot{\alpha}^* \Delta\tau)$ por séries de Taylor, tem-se, para pequenos valores de $\Delta\tau$,

$$\cos(\ddot{\alpha}^* \Delta\tau) = 1 - \frac{(\ddot{\alpha}^* \Delta\tau)^2}{2} \cong 1 \quad (89a)$$

$$\sin(\ddot{\alpha}^* \Delta\tau) = \ddot{\alpha}^* \Delta\tau - (\ddot{\alpha}^* \Delta\tau)^3/6 = \ddot{\alpha}^* \Delta\tau \quad (89b)$$

Substituindo as equações (89) na equação (88b) obtém-se,

$$\cos \alpha^{\tau+\Delta\tau} = \cos \alpha^{\tau} - \ddot{\alpha}^* \Delta\tau \sin \alpha^{\tau} \quad (90)$$

Combinando agora as equações (86) e (90) e isolando $\ddot{\alpha}^*$, chega-se à seguinte equação,

$$\ddot{\alpha}^* = \frac{D(\alpha)/\Delta\xi + \epsilon \cos \alpha^{\tau} - 1}{2A_p \Delta\eta + \epsilon \sin(\alpha^{\tau}) \Delta\tau} \quad (91)$$

ou, utilizando o método de Euler na avaliação de $\ddot{\alpha}^*$, tem-se,

$$\alpha^{\tau+\Delta\tau} = \alpha^{\tau} + \left[\frac{D(\alpha)/\Delta\xi + \epsilon \cos \alpha^{\tau} - 1}{2A_p \Delta\eta + \epsilon \sin(\alpha^{\tau}) \Delta\tau} \right] \Delta\tau \quad (92)$$

onde, na existência de um processo iterativo, tem-se o termo $D(\alpha)$ avaliado a cada iteração com os valores de α da iteração anterior.

As equações (83), (85) e (92) possuem, cada uma, particularidades específicas, que serão discutidas em seção subsequente.

3.3 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA TRAJETÓRIA - CONSIDERANDO A MASSA DO EIXO

Ao considerar-se que a massa do eixo equipara-se, em ordem de grandeza, com o carregamento aplicado ao mesmo, o balanço de forças deve incluir as forças inerciais devidas às acelerações desta massa. Para este caso o balanço de forças é dado pelo conjunto de equações (61), apresentado na seção 2.4.1. No caso particular em que o carregamento possui o mesmo sentido da força peso, tem-se,

$$\ddot{\epsilon}^* - \epsilon(\dot{\omega}_L^* - \dot{\psi}^*)^2 = A \cos \psi + BF_1^* \quad (65a)$$

$$\epsilon(\ddot{\omega}_L^* - \ddot{\psi}^*) + 2\dot{\epsilon}^*(\dot{\omega}_L^* - \dot{\psi}^*) = A \sin \psi + BF_2^* \quad (65b)$$

respectivamente para as direções \hat{e}_1 , ao longo da linha de centros, e \hat{e}_2 , perpendicular à linha de centros.

A trajetória do eixo é obtida a partir da solução deste sistema de equações diferenciais a cada instante de tempo considerado. Para tal, o método de Euler tem sido extensivamente utilizado na literatura. A desvantagem deste método reside no fato dele utilizar apenas os termos de 1ª ordem do desenvolvimento em série de Taylor da função solução.

São disponíveis, no entanto, métodos de solução de equações diferenciais que, embora envolvam somente derivadas de 1ª ordem, produzem resultados equivalentes àqueles obtidos por expansões em séries de Taylor quando se retém termos de ordem mais elevada. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem, por exemplo, utiliza aproximações que equivalem, em precisão, à expansão em série de Taylor na qual se retém os termos de 4ª ordem.

A implementação numérica destes dois métodos, Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem, é apresentada a seguir e posteriormente serão apresentados testes comparativos entre eles.

3.3.1 Método de Euler

O método de Euler é um método simples e, por este motivo, bastante utilizado na solução de equações diferenciais.

A solução de uma equação diferencial ordinária qualquer de 1ª ordem $y'=f(x,y)$, para a qual se conhece uma condição inicial da forma $y(x_1)=y_1$, pode ser obtida a partir do desenvolvimento em série de Taylor da função solução $y=F(x)$.

Para determinar-se $y(x_2)$, onde $x_2=x_1+h$, o desenvolvimento de $y=F(x)$ em torno do ponto (x_1, y_1) fornece,

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{1!} y_1' + \frac{h^2}{2!} y_1'' + \dots + \frac{h^n}{n!} y_1^{(n)} \quad (93)$$

considerando que $F(x)$ tenha derivadas contínuas até a n-ésima ordem.

Genericamente,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!} y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \dots + \frac{h^n}{n!} y_i^{(n)} \quad (94)$$

e se na equação (94) abandonar-se os termos de ordem igual ou superior a dois, obtém-se,

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' \quad (95)$$

equação esta, que caracteriza o método de Euler. A aplicação sucessiva da equação (95) fornece a solução da equação diferencial em consideração.

A desvantagem deste método está no fato dele utilizar apenas aproximações de 1ª ordem, o que caracteriza um erro de truncamento local de 2ª ordem e erro de truncamento total de 1ª ordem, devido à propagação do erro [29]. O uso de pequenos valores de h podem reduzir estes erros.

O método de Euler pode ser facilmente estendido de forma a resolver uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem ou qualquer ordem superior. Para

isto, faz-se necessária a introdução de variáveis dependentes auxiliares de forma a reduzir a equação original a um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem. A resolução simultânea de tal sistema de equações de 1ª ordem fornece a solução da equação original.

O sistema de equações diferenciais da trajetória (65) pode ser reduzido para um sistema de equações de 1ª ordem e resolvido utilizando-se o método de Euler. Assim, obtém-se,

$$\ddot{\epsilon}^{*\tau} = A \cos \psi + B F_1^* + \epsilon (\omega_L^* - \dot{\psi}^*) \quad (96a)$$

$$\ddot{\psi}^{*\tau} = 1/\epsilon \left[-A \sin \psi - B F_2^* + 2\dot{\epsilon}^* (\omega_L^* - \dot{\psi}^*) \right] + \dot{\omega}_L^* \quad (96b)$$

e,

$$\dot{\epsilon}^{*\tau+\Delta\tau} = \dot{\epsilon}^{*\tau} + \Delta\tau \ddot{\epsilon}^{*\tau} \quad (96c)$$

$$\dot{\psi}^{*\tau+\Delta\tau} = \dot{\psi}^{*\tau} + \Delta\tau \ddot{\psi}^{*\tau} \quad (96d)$$

Adicionalmente,

$$\epsilon^{\tau+\Delta\tau} = \epsilon^{\tau} + \Delta\tau \dot{\epsilon}^{*\tau+\Delta\tau} \quad (96e)$$

$$\psi^{\tau+\Delta\tau} = \psi^{\tau} + \Delta\tau \dot{\psi}^{*\tau+\Delta\tau} \quad (96f)$$

Um fluxograma associado a este método é apresentado na figura 18.

Como o sistema de equações da trajetória (65) é de 2ª ordem, devem ser fornecidas quatro condições iniciais, a saber, os valores de $\dot{\epsilon}^*$, ϵ , $\dot{\psi}^*$ e ψ em $\tau=0$.

No fluxograma da figura 18, o bloco referente ao cálculo das componentes F_1^* e F_2^* da força hidrodinâmica, engloba todo o procedimento computacional requerido para a solução da equação de Reynolds e da fronteira de cavitação, representado pelo fluxograma da figura 17.

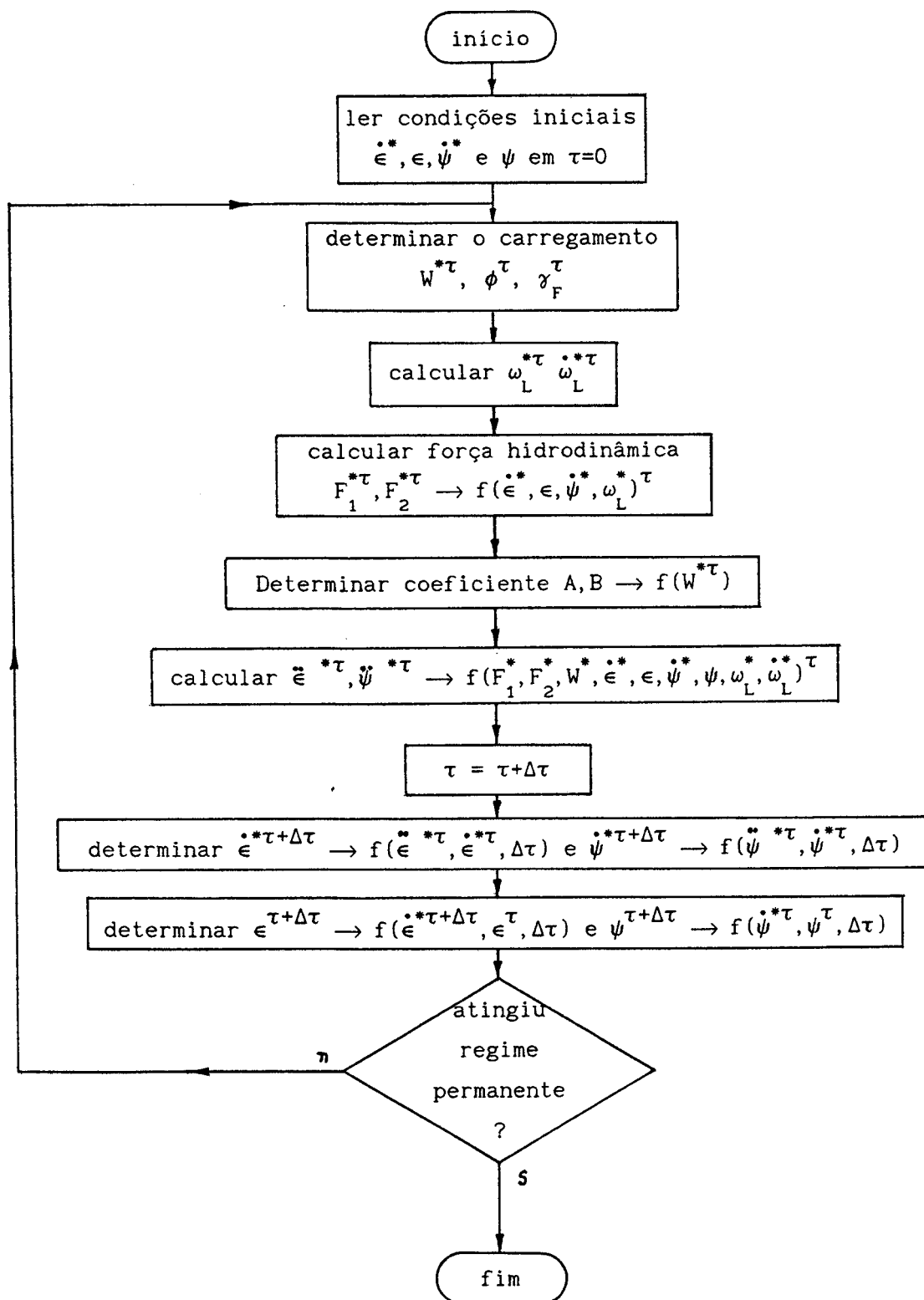


Figura 18 - Fluxograma para a determinação da trajetória do eixo segundo o método de Euler.

3.3.2 Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem utilizado na resolução de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem $y'=f(x,y)$, avalia y_{i+1} a partir de quatro estimativas de $f(x,y)$ no intervalo entre x_i e x_{i+1} . A precisão obtida por este método equivale à expansão em série de Taylor na qual se retém os termos de 4ª ordem de h . A solução de equações diferenciais de ordem igual ou superior a dois segue o procedimento discutido no item 3.3.1.

Para a implementação numérica deste método na determinação da trajetória do eixo sugere-se o uso da subrotina apresentada em [30]*, para a qual o sistema de equações (65) é substituído pelo seguinte sistema de equações,

$$F(1) = \text{Acos}[Y(4)] + BF_1^* + Y(2)[\omega_L^* - Y(3)]^2 \quad (97a)$$

$$F(2) = Y(1) \quad (97b)$$

$$F(3) = 1/Y(2) \{ -\text{Asen}[Y(4)] - BF_2^* + 2Y(1)[\omega_L^* - Y(3)] \} + \ddot{\omega}_L^* \quad (97c)$$

$$F(4) = Y(3) \quad (97d)$$

onde $Y(1) = \dot{\epsilon}^*$, $Y(2) = \epsilon$, $Y(3) = \dot{\psi}^*$ e $Y(4) = \psi$.

Como frisado anteriormente, é necessário o estabelecimento das condições iniciais do problema. Adicionalmente, a determinação das componentes F_1^* e F_2^* da força hidrodinâmica seguem o procedimento computacional apresentado no fluxograma da figura 17.

A determinação da trajetória do eixo utilizando o método de Runge-Kutta segue o fluxograma ilustrado na figura 19.

* Devido a um erro tipográfico, o segundo valor de A na subrotina RUNGE (p. 677) não está correto. O valor correto é $A = 1 - 1/\sqrt{2}$.

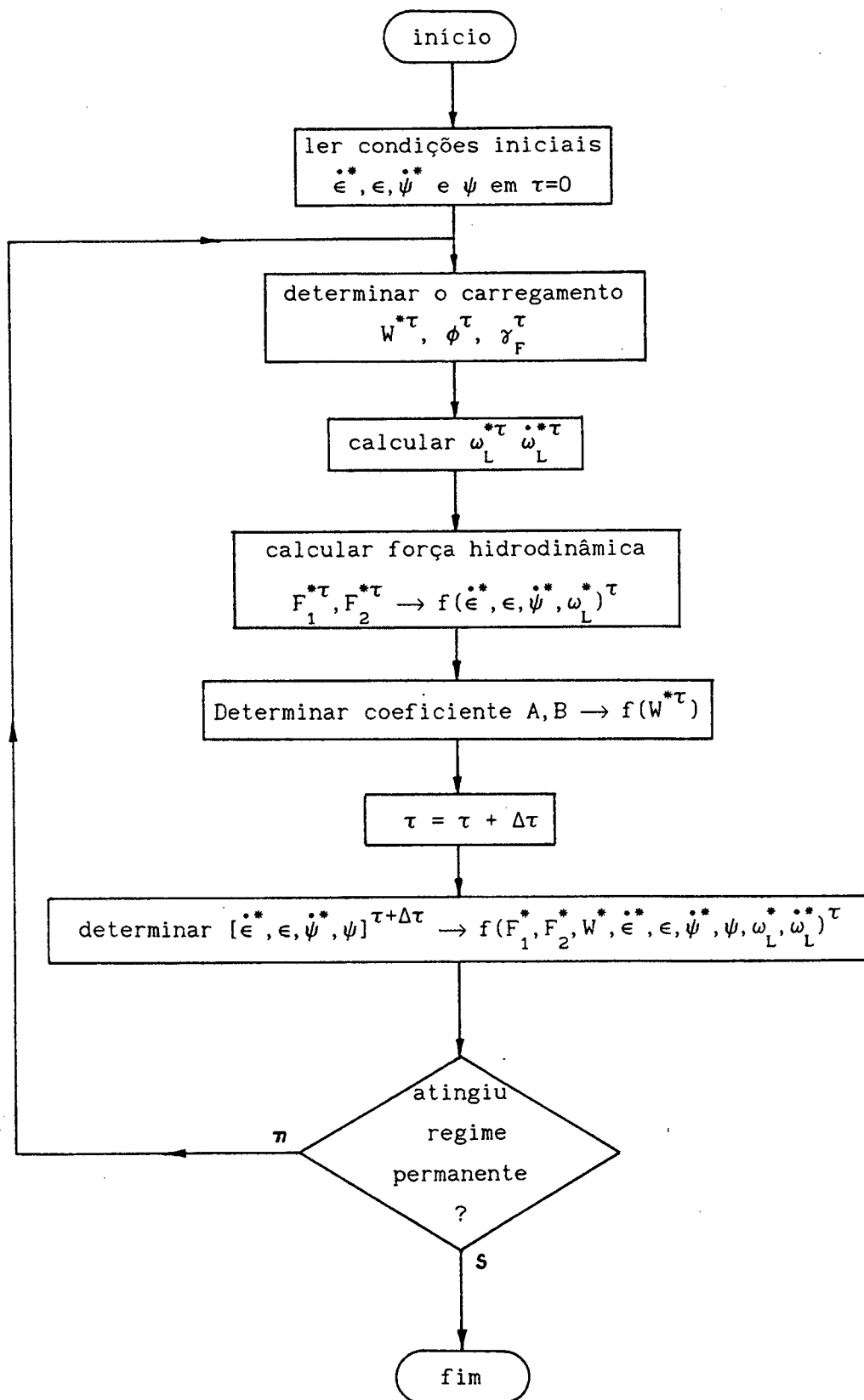


Figura 19 - Fluxograma para a determinação da trajetória do eixo segundo o método de Runge-Kutta.

3.4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA TRAJETÓRIA - DESCONSIDERANDO A MASSA DO EIXO

Nos mancais sujeitos a carregamentos devidos basicamente às forças de inércia de componentes móveis, como é o caso dos mancais de máquinas alternativas, a massa do eixo pode ser desprezada. Conseqüentemente, o balanço de forças no mancal possui uma forma simplificada, onde, de acordo com a equação 2.4.2, tem-se,

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \cos \psi + F_1^* = 0 \quad (67a)$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \sin \psi + F_2^* = 0 \quad (67b)$$

respectivamente para as direções ao longo e normal à linha de centros.

A trajetória do eixo é caracterizada pela determinação das velocidades $(\dot{\epsilon}, \dot{\psi})$ e posição (ϵ, ψ) a cada instante de tempo. A princípio, nas equações (67a) e (67b) somente a variável ψ encontra-se de forma explícita. As demais variáveis, necessárias à determinação da trajetória, encontram-se embutidas nas componentes da força hidrodinâmica.

De forma a obter-se um sistema de equações para a determinação da trajetória que possa ser resolvido numericamente, a integração do campo de pressões é realizada por partes, conforme apresentado no Apêndice I, obtendo-se,

$$K_1 W^* \cos \psi + I_1 - \dot{\epsilon}^* I_2 + \dot{\psi}^* I_3 - \epsilon I_4 = 0 \quad (98a)$$

$$K_1 W^* \sin \psi + I_5 - \dot{\epsilon}^* I_6 + \dot{\psi}^* I_7 - \epsilon I_8 = 0 \quad (98b)$$

onde,

$$K_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) \quad (99)$$

As equações (98a) e (98b) representam um sistema de equações diferenciais de

1ª ordem.

Serão apresentadas a seguir, duas metodologias computacionais para a solução deste sistema de equações diferenciais.

3.4.1 Método de Substituição [31,32]

A partir das equações (98) pode-se determinar as velocidades radial e circunferencial $\dot{\epsilon}^*$ e $\dot{\psi}^*$, respectivamente, através da substituição direta de uma equação na outra.

Desta forma, isolando $\dot{\epsilon}^*$ na equação (98a) obtém-se,

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{K_1 W^* \cos \psi + I_1 + \dot{\psi}^* \epsilon I_3 - \epsilon I_4}{I_2} \quad (100a)$$

Substituindo-se esta equação na equação (98b) e isolando $\dot{\psi}^*$, obtém-se,

$$\dot{\psi}^* = \frac{K_1 W^* (I_2 \sin \psi - I_6 \cos \psi) + I_6 (\epsilon I_4 - I_1) - \epsilon I_2 I_8}{\epsilon (I_3 I_6 - I_2 I_7)} \quad (100b)$$

Como o sistema de equações (98) é de 1ª ordem existe a necessidade de prescreverem-se as condições iniciais de ϵ e ψ . A partir destas condições iniciais e do conhecimento do carregamento para o instante em consideração, obtém-se, através das equações (100), as velocidades do eixo.

A posição do eixo no instante seguinte ao considerado pode ser determinado pelo uso do método de Euler, segundo o qual,

$$\epsilon^{\tau+\Delta\tau} = \epsilon^{\tau} + \Delta\tau \dot{\epsilon}^{\tau} \quad (101a)$$

$$\psi^{\tau+\Delta\tau} = \psi^{\tau} + \Delta\tau \dot{\psi}^{\tau} \quad (101b)$$

A figura 20 apresenta o fluxograma computacional para a determinação da trajetória do eixo utilizando o método de Substituição.

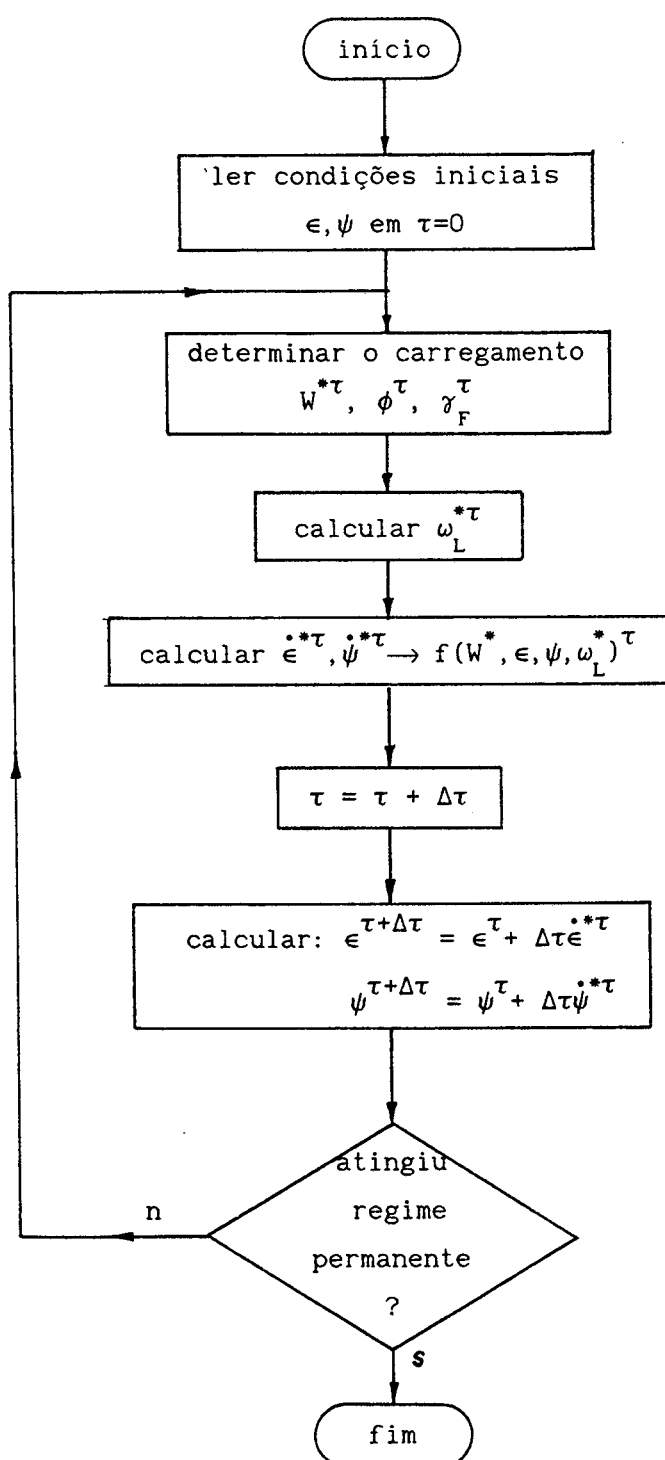


Figura 20 - Fluxograma para a determinação da trajetória do eixo segundo o método de Substituição.

3.4.2 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta, apresentado anteriormente, pode também ser utilizado na resolução do sistema de equações (98). A sua utilização, ao contrário do método direto, permite determinar-se as velocidades $(\ddot{\epsilon}^*, \dot{\psi}^*)$ e a posição (ϵ, ψ) do eixo no instante seguinte ao considerado.

Isolando-se $\ddot{\epsilon}^*$ na equação (98a) e $\dot{\psi}^*$ na equação (98b), obtém-se,

$$\ddot{\epsilon}^* = \frac{K_1 W^* \cos \psi + I_1 + \dot{\psi}^* \epsilon I_3 - \epsilon I_4}{I_2} \quad (102a)$$

$$\dot{\psi}^* = - \frac{K_1 W^* \sin \psi - I_5 + \ddot{\epsilon}^* I_6 - \epsilon I_8}{\epsilon I_7} \quad (102b)$$

Este sistema de equações pode ser resolvido com o auxílio da subrotina computacional do método de Runge-Kutta apresentado em [30]. Como a razão de excentricidade ϵ é reavaliada em cada uma das quatro posições intermediárias entre o intervalo τ_i e τ_{i+1} , inerentes ao método, todas as integrais duplas, de I_1 a I_8 , devem ser reavaliadas a cada uma destas posições, por serem funções de ϵ .

O procedimento computacional necessário à implementação do método de Runge-Kutta pode ser melhor compreendido pelo fluxograma apresentado na figura 21. Nele, o bloco referente ao cálculo das velocidades e posição do eixo no instante $\tau + \Delta\tau$ refere-se à subrotina específica do método de Runge-Kutta e, interna a esta subrotina, as integrais I_1 a I_8 são reavaliadas a cada posição intermediária.

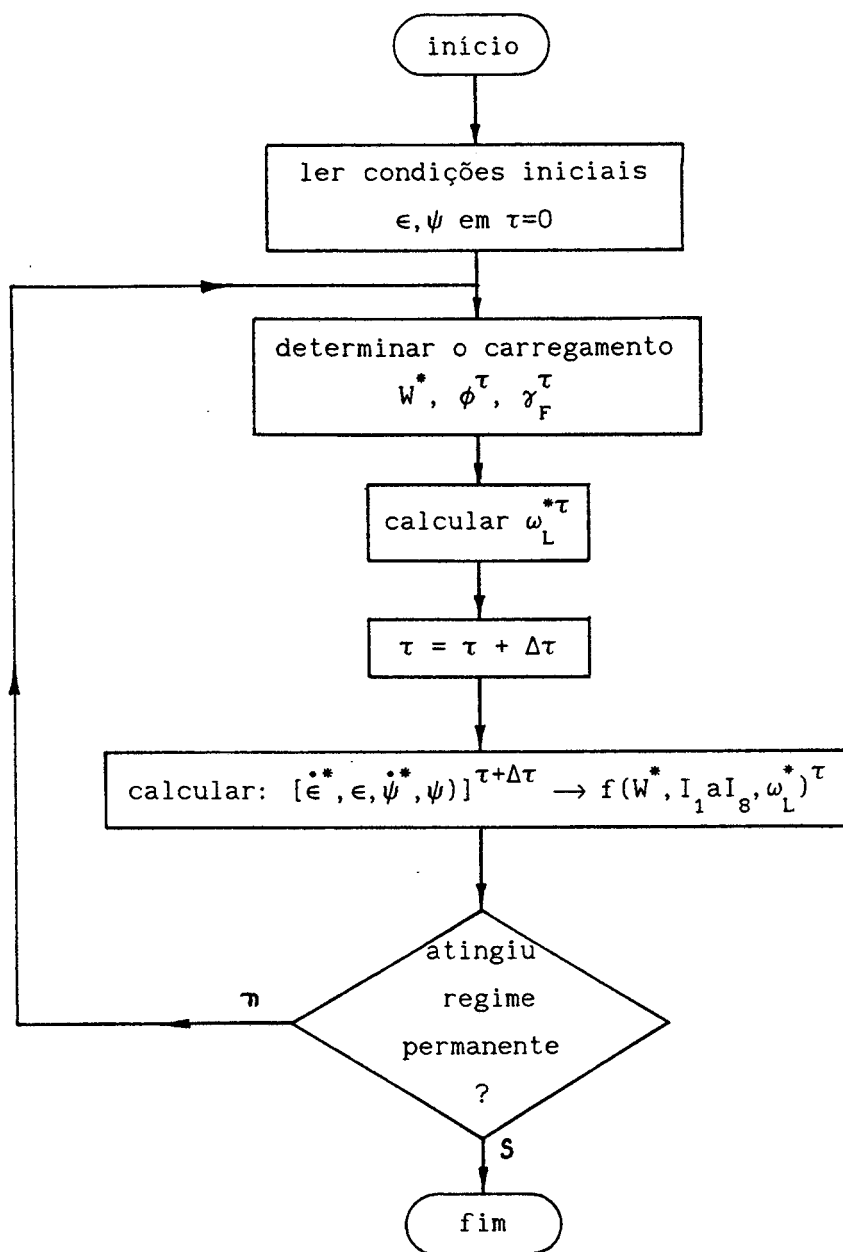


Figura 21 - Fluxograma para a determinação da trajetória do eixo segundo o método de Runge-Kutta.

4. APROXIMAÇÃO DE MANCAL RADIAL CURTO

A partir da formulação da equação da hidrodinâmica por Reynolds, os primeiros esforços foram no sentido de resolver esta equação. A complexidade da equação de Reynolds foi contornada pelo estabelecimento de hipóteses simplificativas, como aquelas propostas por Sommerfeld, em 1904. Sommerfeld, considerando o mancal infinitamente longo, desprezou as variações de pressão na direção axial e, admitindo uma periodicidade das condições de contorno, obteve expressões analíticas para a distribuição de pressão, carregamento e coeficiente de atrito em um mancal radial.

O modelo de Sommerfeld foi largamente utilizado nos anos que se seguiram, embora a condição de periodicidade do filme de óleo gerasse uma inconsistência física que levava a resultados imprecisos.

A idéia de utilizar um modelo de mancal infinitamente curto, ao contrário do modelo de Sommerfeld, ocorreu inicialmente a Michell, em 1929, que sugeriu a seguinte equação [2,6]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6U \frac{dh}{dx} \quad (103)$$

Entretanto, somente em 1952 é que Ocvirk apresentou resultados completos a partir da aproximação de mancal curto. A partir de então, a

simplicidade deste modelo, aliada à precisão satisfatória de seus resultados, tem feito com que ele se tornasse uma ferramenta de uso constante no projeto de mancais radiais.

4.1 EQUAÇÃO PARA O CARREGAMENTO DINÂMICO

Os mancais são classificados como sendo curtos quando a relação entre o comprimento L e o diâmetro D (L/D) é menor que $1/4$. Nestes mancais as variações de pressão ao longo da direção η podem ser desconsideradas na equação de Reynolds (48), que pode então ser escrita como,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = \frac{1}{G_\xi [1 + \epsilon \cos(\pi\eta)]^{3/2}} \left\{ \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \sin(\pi\eta) + 2\dot{\epsilon}^* \cos(\pi\eta) \right\} \quad (104)$$

Os termos adimensionais utilizados na obtenção da equação (104) são os mesmos empregados na equação (48), com exceção da coordenada η . Esta coordenada é definida como sendo,

$$\eta = \frac{\theta}{\pi} \quad (105)$$

que caracteriza o final do filme de óleo (domínio de solução) em $\theta_2 = \pi$, conhecida como condição de meio-Sommerfeld.

A equação (104) pode ser resolvida analiticamente realizando-se a integração dupla em relação a ξ e aplicando-se as seguintes condições de contorno,

$$i) P = 0 \text{ em } \xi = 0 \quad (106a)$$

$$ii) \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ em } \xi = L/D \quad (106b)$$

Obtém-se, assim,

$$P = \frac{1}{2G_{\xi}[1+\epsilon\cos(\pi\eta)]^{3/2}} \left\{ \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \sin(\pi\eta) + 2\dot{\epsilon}^* \cos(\pi\eta) \right\} \left(\xi^2 - \frac{L}{R}\xi \right) \quad (107)$$

da qual obtém-se a distribuição de pressão em um mancal radial curto.

4.2 EQUAÇÃO ANALÍTICA DA FORÇA HIDRODINÂMICA

De posse da equação analítica da distribuição de pressão em um mancal radial curto, a integração desta no domínio de solução fornece a força hidrodinâmica desenvolvida pelo mancal. Em um carregamento estático, a força hidrodinâmica equivale, em módulo, ao carregamento aplicado ao mancal. No caso de carregamento dinâmico, ela será necessária à determinação da trajetória do eixo.

A força hidrodinâmica é obtida indiretamente através da adição vetorial de suas componentes F_1^* e F_2^* , ao longo e normal à linha de centros, respectivamente, onde,

$$F_1^* = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P}{H^{3/2}} \cos(\pi\eta) \pi d\eta d\xi \quad (108a)$$

$$F_2^* = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P}{H^{3/2}} \sin(\pi\eta) \pi d\eta d\xi \quad (108b)$$

As integrações das equações (108) requerem o uso das transformações de

Sommerfeld, e suas deduções completas encontram-se no Apêndice J, de onde obtém-se,

$$F_1^* = - \frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \left\{ \left[1 - 2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) \right] \left\{ \frac{2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2} c_\xi + \left[\frac{2}{(1-\epsilon^2)} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right] b_\xi \right\} + \right. \\ \left. + \pi \dot{\epsilon}^* \left\{ \frac{(1+2\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^{5/2}} c_\xi + \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{-(4\epsilon^4 - 6\epsilon^2 + 2)}{(1-\epsilon^2)^{5/2}} + 2 \right] b_\xi \right\} \right\} \quad (109a)$$

e,

$$F_2^* = \frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \left\{ \left[1 - 2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) \right] \pi \left\{ \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon^2)^{3/2}} c_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} - 1 \right] b_\xi \right\} + \right. \\ \left. + 2\dot{\epsilon}^* \left\{ \frac{2\epsilon}{(1-\epsilon^2)^2} c_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{2}{(1-\epsilon^2)} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right] b_\xi \right\} \right\} \quad (109b)$$

onde,

$$a_\xi = 1 + 0,00069 \text{Re}^{0,88} \quad (110a)$$

$$b_\xi = 0,00061 \text{Re}^{0,88} \quad (110b)$$

$$c_\xi = a_\xi - b_\xi \quad (110c)$$

As equações (109) referem-se à formulação turbulenta de um mancal radial curto submetido a um carregamento dinâmico. De forma semelhante ao descrito para o mancal finito, pode-se obter as equações da força hidrodinâmica em formulação laminar impondo-se a condição de $\text{Re} = 0$.

As equações para o carregamento estático podem ser obtidas ao fazer-se $\dot{\epsilon}^* = \dot{\psi}^* = \omega_L^* = 0$. As equações assim obtidas diferem apenas no sinal em relação àquelas de [2], devido aos diferentes sistemas de coordenadas adotados.

4.3 DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA TRAJETÓRIA DO EIXO

Independente do modelo matemático de mancal adotado, finito ou curto, o sistema de equações a ser resolvido para determinação da trajetória do eixo é o mesmo. A diferença entre um e outro modelo está na forma de determinação das componentes da força hidrodinâmica, numérica para o mancal finito e analítica para a aproximação de mancal curto, ocasionando pequenas alterações na forma de determinar a trajetória do eixo, como será visto a seguir.

4.3.1 Considerando a massa do eixo

Quando a massa do eixo influencia as características dinâmicas do mancal, a trajetória do eixo é obtida a partir da resolução do sistema de equações diferenciais (61). Como anteriormente apresentado para mancal finito, este sistema de equações pode ser resolvido por métodos numéricos como Euler e Runge-Kutta, de acordo com os fluxogramas das figuras 18 e 19.

Ao utilizar a aproximação de mancal curto, as componentes da força hidrodinâmica, requeridas nas equações (61), são calculadas através das equações (109), tornando o programa computacional muito mais simples e, conseqüentemente, mais veloz.

4.3.2 Desconsiderando a massa do eixo

No sistema de equações para determinação da trajetória em que a massa do eixo não influencia as características dinâmicas do mancal, dadas pelas equações (67), as velocidades $\dot{\epsilon}^*$ e $\dot{\psi}^*$, que caracterizam o movimento do eixo, estão embutidas nas equações das componentes da força hidrodinâmica.

No modelo de mancal finito, foi apresentado o método de Substituição direta para determinação destas velocidades. Pela sua simplicidade, este método será utilizado na determinação da trajetória no caso da aproximação de mancal curto.

Como neste modelo as componentes da força hidrodinâmica são obtidas a partir de equações analíticas, torna-se simples o procedimento de encontrar equações explícitas para as velocidades $\dot{\epsilon}^*$ e $\dot{\psi}^*$, desprezando o trabalho computacional de calcular as integrais duplas do modelo de mancal finito.

Para a direção \hat{e}_1 , ao longo da linha de centros, a substituição da equação (109a) na equação (67a) fornece,

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{1}{\pi T_2} \left\{ KW^* \cos \psi - \left[1 - 2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) \right] T_1 \right\} \quad (111)$$

e para a direção \hat{e}_2 , normal à linha de centros, a substituição da equação (109b) na equação (67b) fornece,

$$\dot{\psi}^* = \frac{1}{2\pi T_3} \left[\pi T_3 (2\omega_L^* - 1) - KW^* \sin \psi - 2\dot{\epsilon}^* T_4 \right] \quad (112)$$

onde,

$$K = \frac{K_1}{K_2} \quad (113a)$$

$$K_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) \quad (113b)$$

$$K_2 = \frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \quad (113c)$$

$$T_1 = \frac{2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2} c_\xi + \left[\frac{2}{(1-\epsilon^2)} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right] b_\xi \quad (113d)$$

$$T_2 = \frac{(1+2\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^{5/2}} c_\xi + \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{-(4\epsilon^4 - 6\epsilon^2 + 2)}{(1-\epsilon^2)^{5/2}} + 2 \right] b_\xi \quad (113e)$$

$$T_3 = \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon^2)^{3/2}} c_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} - 1 \right] b_\xi \quad (113f)$$

$$T_4 = \frac{2\epsilon}{(1-\epsilon^2)^2} c_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{2}{(1-\epsilon^2)} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right] b_\xi \quad (113g)$$

Substituindo agora, a equação (112) na equação (111) e isolando $\dot{\epsilon}^*$, obtém-se,

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{KW^* (\pi T_3 \cos\psi + T_1 \sin\psi)}{(\pi^2 T_2 T_3 - 2T_1 T_4)} \quad (114)$$

As equações (112) e (114) fornecem as velocidades do eixo no instante em consideração.

O fluxograma computacional apresentado na figura 20 para o método de Substituição permanece inalterado, descrevendo a sequência de procedimentos computacionais para os modelos de mancal finito e aproximação de mancal curto.

5. CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS

O desempenho de um mancal radial é avaliado a partir do conhecimento de várias características operacionais, tais como espessura mínima do filme de óleo, perdas mecânicas e vazão lateral de óleo. Tais características são decorrentes dos parâmetros geométricos e de funcionamento do mancal, de forma que a correta manipulação destes parâmetros permite o dimensionamento de um mancal que supra, de forma eficiente, exigências tais como baixas perdas mecânicas ou elevada capacidade de carga.

A seguir é apresentada a forma de obter-se as características acima mencionadas a partir do campo de pressões ou das características dinâmicas do eixo.

5.1 ESPESSURA MÍNIMA DO FILME DE ÓLEO

Em um mancal submetido a um carregamento dinâmico, a espessura mínima do filme de óleo varia de valor e posição continuamente no tempo. O seu conhecimento é de extrema importância, visto que, durante a operação, deve-se evitar valores

da mesma ordem da rugosidade do mancal e do eixo, o que levaria o mancal a operar em um tipo de lubrificação conhecido como lubrificação limite, caracterizado por valores crescentes do fator de atrito. Ainda, o conhecimento da espessura mínima do filme de óleo é útil no dimensionamento da malha a ser utilizada no filtro de óleo, de forma a evitar a presença de partículas que possam danificar as superfícies do eixo e do mancal.

De acordo com o Apêndice B, a espessura do filme de óleo é dada pela seguinte equação:

$$h = c(1 + \epsilon \cos \theta) \quad (115)$$

Como pode ser visto na figura 22, o filme de óleo apresenta a menor espessura na posição $\theta = \pi$, possuindo um valor que pode ser obtido a partir da equação (115), na qual $\cos(\pi) = -1$ e portanto:

$$h_{\min} = c(1 - \epsilon) \quad (116)$$

O valor da razão de excentricidade ϵ é variável no tempo, determinada a partir da resolução do sistema de equações diferenciais da trajetória e, portanto, h_{\min} também apresenta esta característica.

A determinação do ponto de espessura mínima γ_{FM} , requer a adoção de um sistema de referência fixo no mancal, como o sistema (x, y) da figura 22. Este mesmo sistema de coordenadas é utilizado na especificação do carregamento W .

Assumindo o sentido positivo do eixo y como origem dos ângulos referentes ao posicionamento do carregamento, designado por γ_w , o ponto de espessura mínima γ_{FM} é obtido a partir da seguinte equação:

$$\gamma_{FM} = \gamma_w - \psi \quad (117)$$

onde ψ é o ângulo de atuação do eixo, também conhecido a partir da resolução

das equações da trajetória.

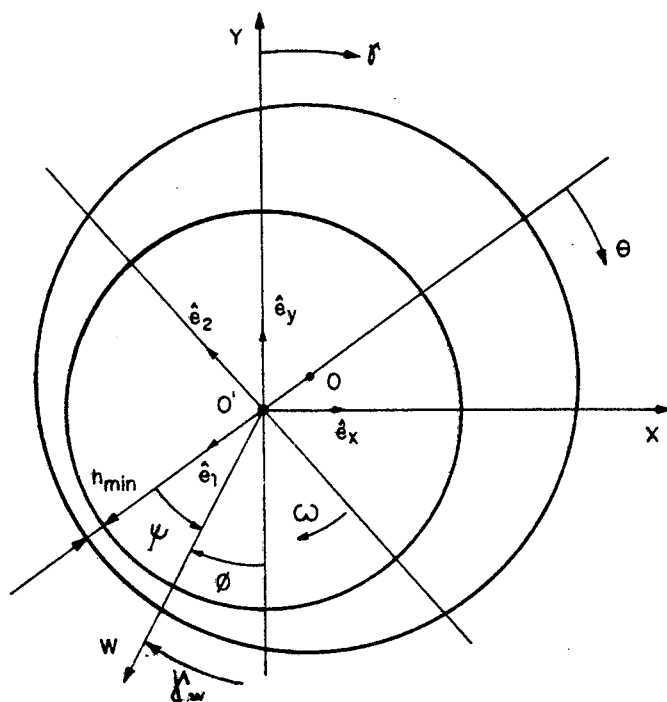


Figura 22 - Localização do ponto de espessura mínima do filme de óleo.

5.2 PERDAS POR FRICÇÃO MECÂNICA

Em um mancal radial, a existência de perdas mecânicas deve-se unicamente ao desenvolvimento de tensões viscosas inerentes ao escoamento do fluido lubrificante.

De acordo com a lei de Newton do escoamento viscoso, representada pela equação (118),

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \quad (118)$$

a existência de gradientes de velocidade na direção radial origina tensões

cisalhantes no fluido que se opõem ao seu escoamento. Nesta equação, a constante de proporcionalidade μ é a viscosidade do fluido lubrificante.

O conhecimento dos gradientes de velocidade nas regiões adjacentes às paredes do eixo e do mancal permite, através da equação (118), determinar as forças de atrito desenvolvidas nestas interfaces.

A determinação da força de atrito desenvolvida na interface do fluido com a parede do eixo é de maior interesse, pela necessidade de conhecer-se o torque resistente e, conseqüentemente, a potência dissipada pelo mancal. A integração da tensão sobre o domínio de solução fornece a força de atrito,

$$F_A = \int_A \tau dA \quad (119)$$

onde,

$F_A \rightarrow$ força de atrito

$\tau \rightarrow$ tensão cisalhante

$A \rightarrow$ área

Para o caso específico da interface fluido/parede do eixo, tem-se que a tensão cisalhante é fornecida por,

$$\tau_E = \mu \left. \frac{du}{dz} \right|_h \quad (120)$$

onde, de acordo com o Apêndice A,

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - hz) + \frac{U}{h} z \quad (121)$$

e, conseqüentemente,

$$\tau_E = \frac{\mu U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (122)$$

Portanto, a força de atrito no eixo será,

$$F_A = \int_0^\theta \int_0^L \left(\frac{\mu U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) R d\theta dy \quad (123)$$

que, de acordo com as adimensionalizações anteriormente utilizadas, fornece,

$$F_A^* = \int_0^1 \int_0^{L/R} \left(\frac{1}{H} + \frac{3}{(\pi + \alpha) H^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) (\pi + \alpha) d\eta d\xi \quad (124)$$

onde,

$$F_A^* = \frac{c}{\mu U R^2} F_A \quad (125)$$

Para o caso em que é utilizada a aproximação de mancal curto, a integração da equação (124) pode ser realizada analiticamente a partir do uso da equação (107). No caso de mancal finito, a integração da equação (124) é realizada numericamente, da seguinte forma,

$$F_A^* = \sum_{i=2}^{12} \sum_{j=2}^{m2} \left(\frac{1}{H} + \frac{3}{(\pi + \alpha) H^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) \Big|_p (\pi + \alpha_p) \Delta \eta \Delta \xi \quad (126)$$

onde a derivada da pressão em relação a η pode ser avaliada da seguinte forma,

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_p = \frac{P_E - P_W}{2\delta\eta} \quad (127)$$

Deve ser observado que a força de atrito determinada pela equação (126) refere-se somente a meio domínio de solução, devendo ser multiplicada pelo fator 2 para obter-se o valor correto correspondente ao mancal em análise.

Conhecida a força de atrito atuante no eixo, obtém-se o torque

resistente e a potência dissipada no mancal a partir das seguintes relações,

$$T = F_A R \quad (128)$$

$$POT = T\omega \quad (129)$$

onde,

$T \rightarrow$ torque resistente no eixo;

$POT \rightarrow$ potência dissipada no mancal;

$R \rightarrow$ raio do eixo;

$\omega \rightarrow$ velocidade angular do eixo.

5.3 VAZÃO LATERAL DE ÓLEO

A partir da determinação da vazão lateral de óleo em um mancal radial é possível dimensionar corretamente a bomba de óleo, desta forma garantir um suprimento de óleo suficiente para o perfeito funcionamento do mancal. A lubrificação deficiente do mancal pode acarretar-lhe danos irreparáveis. Tais danos estão associados ao contato metálico entre eixo e mancal, funcionamento em temperaturas extremas, etc.

A vazão de lubrificante pelas laterais do mancal é determinada a partir da integração do campo de velocidades sobre a área lateral do mesmo, ou seja

$$Q_L = \int_0^{\theta_2} \int_0^h v dz R d\theta \quad (130)$$

De acordo com o Apêndice A, a velocidade v pode ser integrada

analiticamente em relação a z ,

$$q_y = \int_0^h v dz \quad (131)$$

obtendo-se,

$$q_y = - \frac{h^3}{12\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (132)$$

onde q_y refere-se a uma vazão por unidade de largura.

A vazão lateral será, então,

$$Q_L = \int_0^{\theta_2} - \frac{h^3}{12\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} R d\theta \quad (133)$$

O uso dos termos adimensionais introduzidos anteriormente fornece,

$$Q_L^* = \int_0^1 -H^{3/2} \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} (\pi + \alpha) d\eta \quad (134)$$

onde,

$$Q_L^* = \frac{2}{cUR} Q_L \quad (135)$$

sendo que a integração da equação (134) pode ser realizada numericamente da seguinte forma,

$$Q_L^* = \sum_{i=2}^{12} -H_p^{3/2} \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} (\pi + \alpha_p) \Delta\eta \quad (136)$$

onde a derivada em ξ pode ser aproximada por,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \frac{P_p - P_s}{(\delta \xi)_s} \quad (137)$$

Pela figura 23, observa-se que $P_s=0$, de acordo com a condição de contorno anteriormente utilizada. Portanto:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\zeta=0} = \frac{P_p}{(\delta \xi)_s} \quad (138)$$

Pela simetria do problema, a vazão lateral total de lubrificante Q_T^* será,

$$Q_T^* = 2Q_L^* \quad (139)$$

que corresponde à vazão de fluido lubrificante a ser suprida pela bomba de óleo a cada instante de tempo considerado.

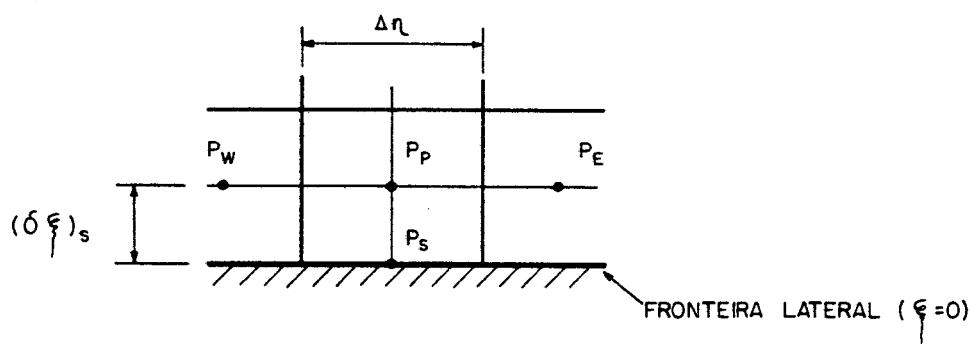


Figura 23 - Volume de controle típico adjacente à fronteira lateral.

5.4 POSICIONAMENTO DOS CANAIS DE ALIMENTAÇÃO DE ÓLEO

O desempenho de um mancal radial é fortemente influenciado pelo posicionamento dos canais de alimentação de óleo. A presença de canais ou ranhuras em uma região em que o filme de óleo desenvolve altas pressões altera o perfil da

distribuição de pressão, diminuindo a capacidade do mancal de suportar carga, entre outros efeitos prejudiciais. Por este motivo, a localização destes detalhes construtivos deve basear-se no levantamento de curvas que indiquem o posicionamento das pressões máximas a cada instante de tempo.

Para o caso particular de um mancal submetido a um carregamento estático o canal de alimentação de óleo deve ser posicionado na região adjacente ao ponto de maior distância entre mancal e eixo, ou seja, radialmente oposto ao ponto de espessura mínima do filme de óleo.

No caso de carregamento dinâmico, após o levantamento da curva de pressões máximas, as regiões onde se desenvolvem os picos de pressão máxima são regiões a serem evitadas para o posicionamento dos canais de alimentação e ranhuras de distribuição de óleo.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da metodologia apresentada nos capítulos anteriores, foi construído um programa computacional em linguagem FORTRAN 77, visando a obtenção das características operacionais de mancais radiais.

O modelo numérico desenvolvido permite a simulação de mancais que operam em regime turbulento e são submetidos a carregamentos dinâmicos. Entretanto, o uso de valores particulares para determinadas variáveis possibilita a abordagem de casos mais simples, tais como os de mancais operando em regime laminar ou submetidos a carregamentos constantes. Adicionalmente, ao ser submetido a um carregamento dinâmico, a massa do eixo pode, muitas vezes, ser desconsiderada no balanço de forças.

Neste Capítulo serão analisados diversos casos em que as características descritas acima encontram-se presentes. Também serão testadas as metodologias apresentadas anteriormente de forma a estabelecer um procedimento confiável e eficiente para a simulação de mancais radiais sujeitos às mais variadas situações de operação.

Finalizando o Capítulo são descritas algumas características do modelo que utiliza a aproximação de mancal curto.

6.1 GENERALIDADES

O uso de modelos numéricos na simulação de fenômenos físicos requer a discretização do domínio de solução. A obtenção de resultados confiáveis com custos computacionais aceitáveis está intimamente relacionada à escolha da malha computacional.

Entretanto, não é somente a malha computacional que requer uma avaliação criteriosa. Como os resultados numéricos são sempre aproximados, obtidos geralmente a partir de processos iterativos, é necessário estabelecer as tolerâncias de convergência a serem utilizadas no programa computacional. De forma semelhante à determinação da malha, a correta escolha das tolerâncias baseia-se na relação entre precisão dos resultados e o tempo computacional, como será visto a seguir.

6.1.1 Determinação da malha computacional

Em qualquer equação diferencial a ser resolvida através do uso de métodos numéricos, uma característica desejável da malha computacional é a isotropia, ou seja, as dimensões do volume de controle devem possuir valores aproximadamente iguais em todas as direções. Esta característica permite que as informações armazenadas nos volumes vizinhos possam ser transferidas com o mesmo peso para o volume em consideração, auxiliando na convergência do método.

De acordo com a transformação de coordenadas apresentada no Capítulo 2, o domínio de solução possui dimensão unitária na direção circunferencial e dimensão L/D na direção axial (meio domínio). Portanto, a partir da estimativa de pontos para a direção circunferencial (1), uma aproximação para o número de pontos na direção axial (m) pode ser obtida por:

$$m = \text{INT}\left(1 \frac{L}{D}\right) + 1 \quad (140)$$

onde a função INT estabelece que m é um número inteiro.

A malha de dimensões $l \times m$ obtida a partir da equação (140) possui volumes com a mesma dimensão nas suas quatro faces, ou seja, são volumes com formato quadrado, e portanto com perfeita isotropia.

Uma primeira avaliação do programa computacional será realizada utilizando-se uma malha de 90×46 pontos na simulação de um carregamento estático. Os resultados obtidos para o número de Sommerfeld (Δ) e posição da fronteira de cavitação (α) são comparados com aqueles obtidos por Cameron [2] e Pinkus [6] para um mancal finito em que é considerada a cavitação.

A comparação entre os três modelos numéricos pode ser observada na Tabela 1, onde são apresentadas as variações de Δ e α com a razão de excentricidade ϵ . Estes dados referem-se a um mancal com relação $L/D = 1/2$ em que se utilizou uma tolerância de convergência de $1,0 \times 10^{-4}$ de erro relativo.

TABELA 1 - Comparativo entre valores do número de Sommerfeld e posição da fronteira de cavitação obtidas por diferentes trabalhos; $L/D = 1/2$.

ϵ	Δ			α (graus)		
	CAMERON	PINKUS	PRESENTE TRABALHO	CAMERON	PINKUS	PRESENTE TRABALHO
0,0	-	-	-	18,5	20	20,3
0,1	0,0739	0,0740	0,0736	17,5	19	20,0
0,2	0,157	0,158	0,157	17,5	18	19,5
0,3	0,261	0,258	0,261	-	18	19,1
0,4	0,409	0,405	0,405	17,0	17	18,5
0,5	0,624	0,640	0,624	-	16	17,8
0,6	0,998	0,995	0,995	16,0	16	16,9
0,7	1,72	1,72	1,72	-	15	15,7
0,8	3,45	3,46	3,46	11,0	14	14,0
0,9	10,27	10,2	10,1	10,0	12	11,0
0,95	-	26,7	26,5	-	9	8,29
0,97	52,3	-	51,0	5,25	-	6,59

No apêndice K são apresentadas as tabelas K1 a K9 em que é feito o comparativo para o número de Sommerfeld (Δ), a posição da fronteira de cavitação (α) e para a relação entre pressão máxima e carga por área projetada (p_{\max}/P_U), considerando-se diversas malhas e diferentes relações L/D. As malhas utilizadas possuem dimensão lxm de 60x41, 60x16, 40x21, 30x21, 30x16, 30x8 pontos. Os valores de L/D utilizados foram 1, 1/2 e 1/4.

A partir da análise destas tabelas observa-se que, independentemente da relação L/D, a utilização de 30 pontos para a direção circunferencial (l) fornece resultados bastante próximos das malhas com o dobro de pontos nesta mesma direção. Entretanto, o uso da equação (140) na determinação do número de pontos na direção axial (m) apresenta bons resultados apenas para uma relação L/D igual a 1/2. Para relações acima de 1/2 esta equação prevê um número maior de pontos que o necessário. Para relações abaixo de 1/2 o número de pontos previstos pela equação (140) é insuficiente. Isto pode ser explicado pelo fato dos gradientes de pressão na direção axial decrescerem com o contínuo aumento da relação L/D, e vice-versa.

Os erros percentuais obtidos a partir do uso de malhas de 30x21 pontos para relação L/D = 1, e de 30x16 pontos para relações L/D iguais a 1/2 e 1/4, quando comparadas com malhas mais refinadas como uma de 60x41, são quase sempre inferiores a 1,0% (em módulo), com exceção da tabela K8. Observa-se ainda que para razões de excentricidade próximas de 1,0 estes erros chegam a 5,0%.

Na análise de um mancal radial as características operacionais de interesse são parâmetros globais, ou seja, aqueles obtidos a partir da integração do campo de pressões tal como o número de Sommerfeld. Na avaliação destes parâmetros (vazão lateral, fator de atrito e trajetória no carregamento dinâmico) os erros decorrentes do uso das malhas de 30 pontos na direção circunferencial serão aproximadamente iguais àqueles obtidos para o número de Sommerfeld, ou seja, inferiores a 1,0% quando comparado com malhas mais refinadas.

O tempo computacional requerido na simulação de um mancal radial

submetido a um carregamento estático é da ordem de segundos, o que permitiria o uso de malhas bastante refinadas. Entretanto, a presente análise de malhas visa o carregamento dinâmico, onde o uso de malhas refinadas tornaria o programa demasiadamente lento, devido ao grande número de iterações que a simulação deste tipo de carregamento requer.

Com a finalidade de validar as malhas anteriores para a simulação de um mancal submetido a um carregamento dinâmico, observa-se, de acordo com as figuras 24(a) e (b), que a trajetória pode apresentar pequenas distorções dependendo da malha utilizada. Nestas figuras as trajetórias do eixo correspondem a uma carga constante e vertical subitamente aplicada ao mesmo, e os casos analisados referem-se aqueles apresentados na Tabela 2.

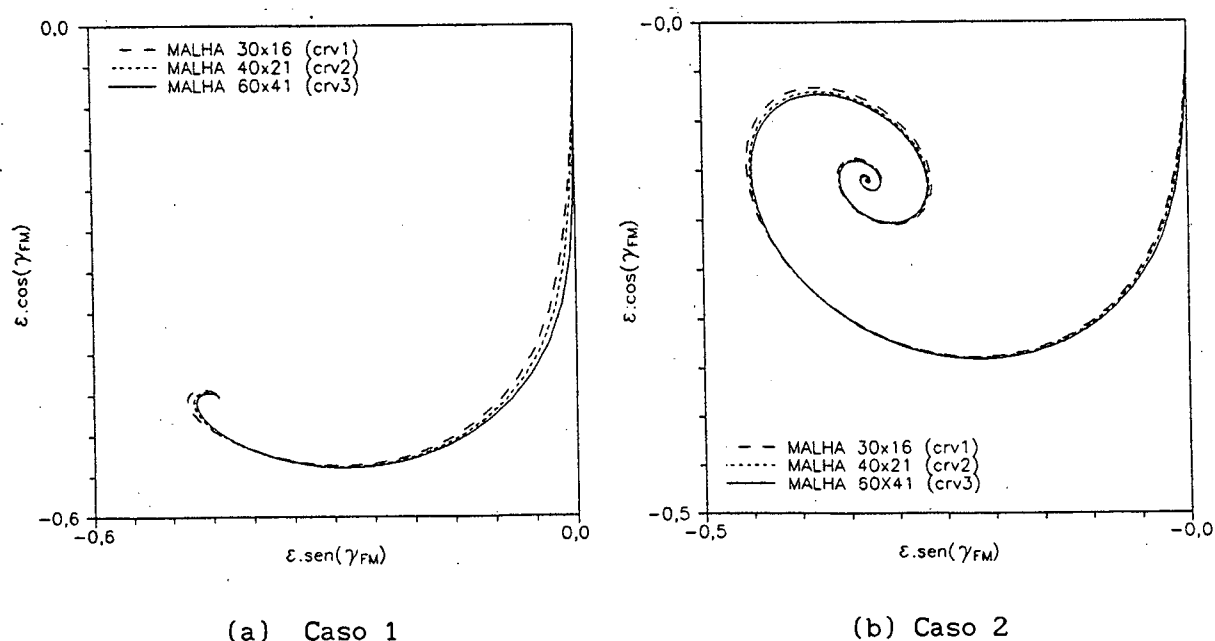


Figura 24 - Comparativo entre malhas - Trajetória do eixo submetido a uma carga constante e vertical.

*Tempo de CPU. Execução em computador IBM 3090 com compilador FORTRAN VSF2.

TABELA 2 - Características geométricas e de operação dos casos analisados no carregamento dinâmico.

CASO	R[m]	L[m]	L/D	c[μ m]	μ [Pa.s]	RPM	W[N]	Re	Re _c
1	0,070	0,035	1/4	25	0,01	3000	$2,14 \times 10^4$	54,978	2174,8
2	0,035	0,035	1/2	250	0,01	3000	$2,65 \times 10^1$	274,89	486,30
3	0,035	0,070	1/1	25	0,002	3000	--	1374,4	1537,8
4	0,035	0,035	1/2	250	0,001	3000	$2,65 \times 10^1$	2748,9	486,30
5	0,035	0,035	1/2	250	0,001	5000	$2,65 \times 10^1$	4581,5	486,30
6	0,027	0,0185	0,34	56	0,007	4000	--	90,478	902,46

Para a trajetória apresentada na figura 24(a), relativamente à malha de 60x41 pontos, a malha de 30x16 pontos apresenta um erro máximo para a excentricidade de 4,41%. Com o uso da malha de 40x21 pontos este erro é reduzido para 2,46%. Para ambas as malhas este erro máximo ocorre no tempo adimensional $\tau = 0,45$, ou seja, no início da trajetória do eixo. Num tempo intermediário, em torno de $\tau = 3,60$, os erros voltam a crescer atingindo 0,82% para a malha de 30x16 pontos e 0,39% para a malha de 40x21 pontos, como pode ser observado na figura 25.

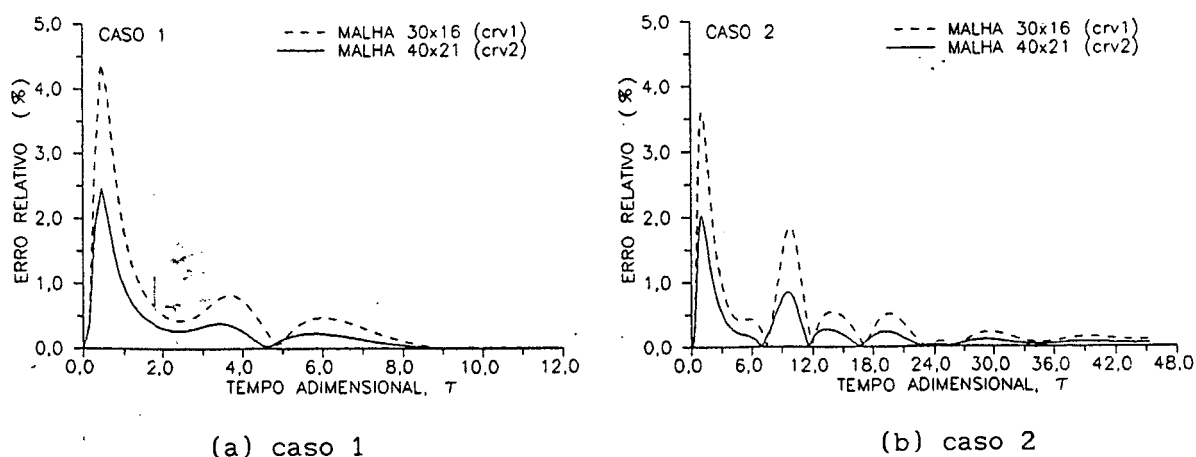


Figura 25 - Erros associados à razão de excentricidade para diferentes malhas (Relativos à malha de 60x41 pontos).

A análise destes gráficos permite afirmar que, quando o mancal está submetido a um carregamento dinâmico, existe a necessidade de utilizar-se malhas mais refinadas do que aquelas associadas ao carregamento estático.

A partir deste ponto, na simulação de mancais radiais submetidos a carregamentos dinâmicos, utilizar-se-ão malhas de 40 pontos na direção circunferencial, sendo que, para a direção axial, o número de pontos variará de acordo com a relação L/D do mancal em estudo, conforme sugerido anteriormente.

De acordo com a tabela K10, no Apêndice K, observa-se que o uso de malhas com 40x21 pontos apresenta uma redução de 85% no tempo computacional em relação às malhas com 60x41 pontos. Os erros máximos em torno de 2,5% são aceitáveis quando é considerada a redução de 85% dos custos computacionais. A mesma redução de tempo é observada no caso 2.

Deve ser ressaltado que as malhas mencionadas anteriormente referem-se a meio domínio de solução. Conforme observado anteriormente, para o eixo alinhado com o mancal, a distribuição de pressão na direção ξ possui simetria.

A solução de apenas meio domínio contribui para a redução do tempo computacional sem afetar a precisão do resultado. Outra maneira de obter-se uma redução significativa do tempo de computação é através do uso de malhas não-uniformes. A concentração maior da malha nas regiões de elevados gradientes de pressão permite a redução do número de pontos da malha sem prejudicar a precisão dos resultados. Entretanto, neste trabalho utilizar-se-ão apenas malhas uniformemente espaçadas.

6.1.2 Critérios de convergência

O sistema de equações algébricas (68), obtido a partir da equação de Reynolds, e a equação para determinação da fronteira de cavitação (77), são resolvidos utilizando métodos iterativos. Em função destes processos iterativos as soluções são sempre aproximadas, pois existe a necessidade de estabelecer-se um critério de convergência que, quando atingido, interrompe as iterações.

Um critério de convergência usualmente adotado é o de erro relativo,

$$\text{ERRO RELATIVO} = \left| \frac{S^i - S^{i-1}}{S^i} \right| < \text{TOLERÂNCIA} \quad (141)$$

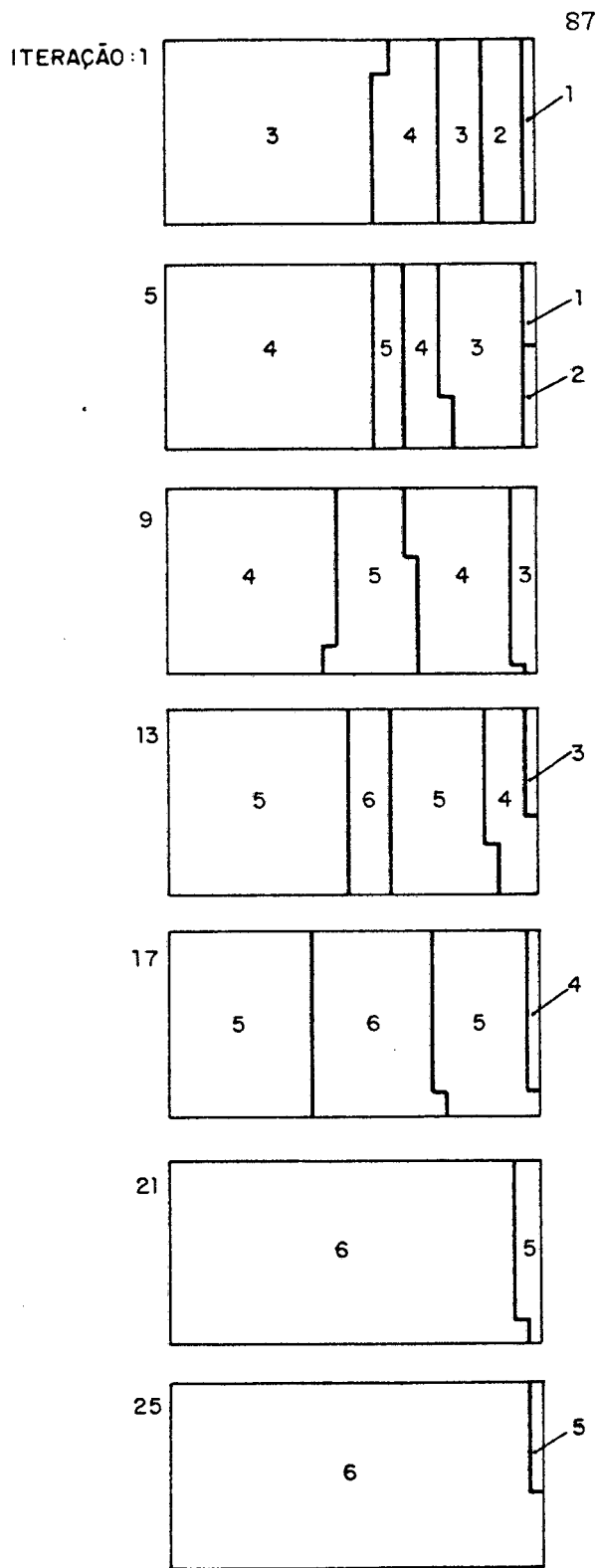
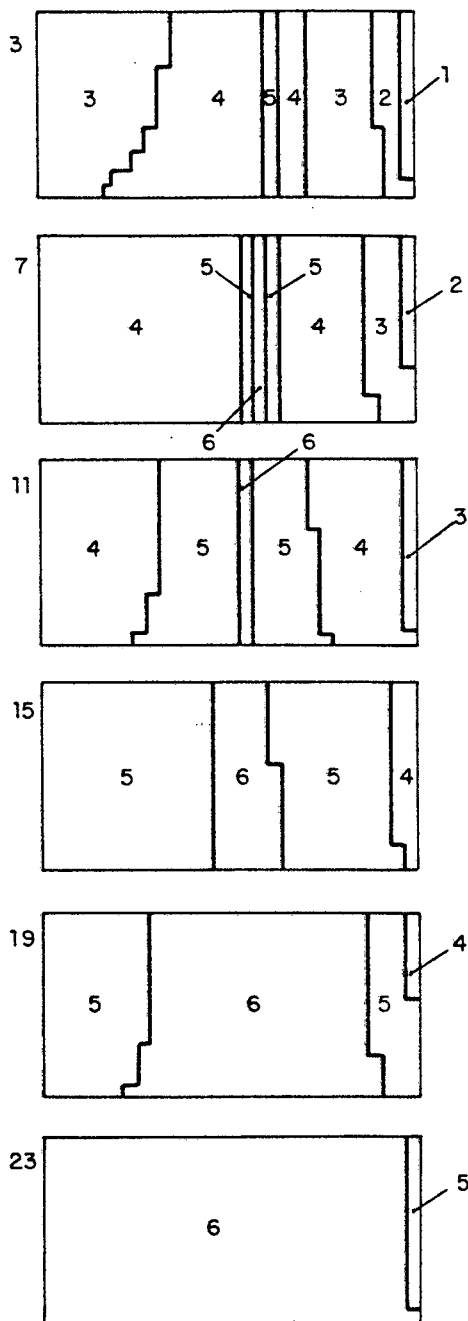
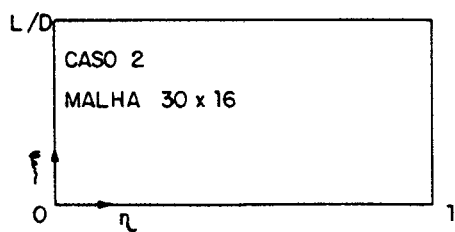
que deve ser satisfeito para cada volume de controle. Um valor típico para a tolerância é de $1,0 \times 10^{-4}$, o que equivale a uma variação do parâmetro considerado inferior a 0,01% de uma iteração para outra.

Em um mancal radial as regiões adjacentes às fronteiras apresentam pressões cujos valores são significativamente inferiores àqueles encontrados nas regiões mais internas do domínio. Esta característica torna o critério de erro relativo um critério muito rígido. Na figura 26 é apresentado o processo de convergência do campo de pressões quando é utilizado o critério de erro relativo. Em cada iteração, o domínio é varrido 4 vezes pelo Método Linha-por-Linha (MLPL), de acordo com o fluxograma computacional apresentado na figura 17. Observa-se que a convergência se desenvolve rapidamente nas regiões de altas pressões, enquanto é requerido um número considerável de iterações adicionais para que as regiões de baixa pressão, principalmente nos volumes adjacentes à fronteira de cavitação, satisfaçam o mesmo critério.

Na determinação de parâmetros globais (capacidade de carga, trajetória, etc) não existe a necessidade da convergência criteriosa das regiões de baixa pressão, face à sua pequena contribuição no processo de integração, quando comparado com as regiões de alta pressão. Desta forma, será adotado um critério de convergência definido por,

$$\text{ERRO RELATIVO MODIFICADO} = \left| \frac{S^i - S^{i-1}}{S_{\max}^i} \right| < \text{TOLERÂNCIA} \quad (142)$$

onde S_{\max} refere-se ao valor máximo do parâmetro considerado. A adoção deste critério resulta na redução de iterações necessárias à convergência pelo fato do mesmo ser menos rígido nas regiões de baixas pressões.



1 \rightarrow ERRO $> 1,0$

2 $\rightarrow 1,0 \geq$ ERRO $> 1,0 \times 10^{-1}$

3 $\rightarrow 1,0 \times 10^{-1} \geq$ ERRO $> 1,0 \times 10^{-2}$

4 $\rightarrow 1,0 \times 10^{-2} \geq$ ERRO $> 1,0 \times 10^{-3}$

5 $\rightarrow 1,0 \times 10^{-3} \geq$ ERRO $> 1,0 \times 10^{-4}$

6 $\rightarrow 1,0 \times 10^{-4} \geq$ ERRO

Figura 26 - Convergência do campo de pressões em mancal

submetido a carregamento estático.

O critério estabelecido pela equação (142) também será utilizado na avaliação da convergência da fronteira de cavitação.

Para o mesmo caso utilizado como exemplo na figura 29, a introdução do critério de convergência dado pela equação (142) ocasionou uma redução de 75% no número total de iterações, com erros insignificantes em parâmetros como número de Sommerfeld, Δ , pressão máxima, p_{\max}/P_U , e fronteira de cavitação, α . A Tabela 3 explora esta comparação.

TABELA 3 - Comparativo entre critérios de convergência.

CRITÉRIO (EQ)	Nº IT ⁺ DE α	Nº IT [*] TOTAL	Δ	P_{\max}/P_U	α (graus)
141	81	539	0,3511001	2,223703	18,88933
142	43	113	0,3511002	2,223701	18,88916

Nos resultados que se seguem será utilizado o critério de convergência estabelecido pela equação (142) com tolerância de $1,0 \times 10^{-4}$.

6.2 AVALIAÇÃO DAS METODOLOGIAS APRESENTADAS

No Capítulo 3 foram apresentadas diversas metodologias de cálculo da fronteira de cavitação e trajetória do eixo que serão agora avaliadas. O objetivo é determinar a metodologia mais adequada a ser utilizada no programa de simulação de mancais radiais.

* Uma iteração refere-se ao conjunto de quatro varreduras no domínio de solução pelo Método Linha-por-Linha.

+ Número de iterações da equação de correção da posição da fronteira de cavitação (α), equação (77), de acordo com o fluxograma da figura 17.

Entre os critérios de avaliação dos diferentes métodos será considerada, principalmente, sua eficiência no que se refere a tempo computacional.

6.2.1 Avaliação das metodologias para a determinação da fronteira de cavitação

A equação numérica para a determinação da fronteira de cavitação, equação (77), apresenta a variável α em uma forma implícita. Conforme discutido no item 3.2, o valor de α é obtido a partir desta equação por um processo iterativo.

As equações (83), (85) e (92) são obtidas isolando-se a variável α presente em um ou dois termos específicos. A cada iteração, o valor de α é obtido a partir de uma destas equações, utilizando-se o valor de α da iteração anterior.

Na determinação da equação (83) a variável α foi isolada a partir do termo q_4^* . Embora esta equação tenha se mostrado bastante eficiente para o cálculo da fronteira de cavitação no caso de carregamento estático ($q_5^* = q_6^* = 0$), os testes realizados com carregamento dinâmico não obtiveram sucesso. Por menores que fossem os incrementos de tempo ($\Delta\tau$) utilizados, logo após um certo número de iterações, o argumento do arco-cosseno, na equação (83), se tornava maior do que um e o programa acusava erro.

A partir destas observações pode-se prever que, no carregamento dinâmico, informações importantes sobre o comportamento da fronteira de cavitação estão contidas no termo $\ddot{\alpha}^*$. O desenvolvimento da equação (85) baseou-se nesta hipótese. Nesta equação, $\ddot{\alpha}^*$ foi isolado a partir do termo q_6^* e, pelo uso da aproximação de Euler, chegou-se a uma equação em que α aparece de forma explícita. Utilizando-se a equação (85), trajetórias completas foram obtidas para o eixo quando uma carga constante é subitamente aplicada, comprovando a importância do parâmetro $\ddot{\alpha}^*$ na determinação da fronteira de cavitação em um carregamento dinâmico.

Entretanto, durante o deslocamento do eixo o termo q_4^* pode apresentar

influência significativa na determinação da fronteira de cavitação. Torna-se, portanto, interessante considerar as informações presentes nos termos q_4^* e q_6^* simultaneamente. A equação (92) foi desenvolvida a partir desta premissa.

Nas figuras 27(a) e 27(b) é apresentado o movimento da fronteira de cavitação na linha de simetria do mancal para os casos 1 e 2, respectivamente, onde o comparativo entre os métodos de Euler, equação (85), e Semi-Implicito, equação (92), indica não existir diferenças.

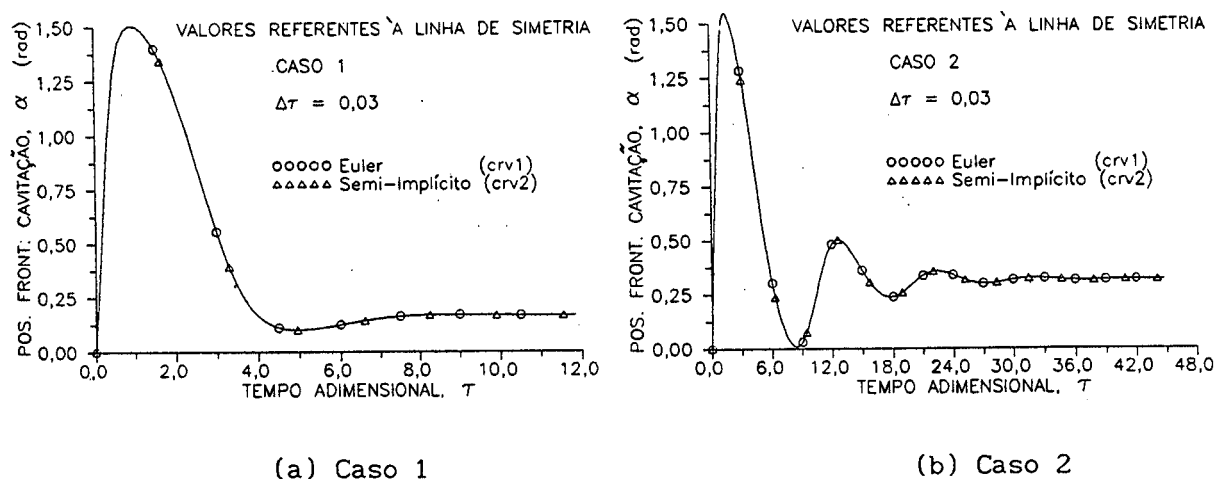


Figura 27 - Comparativo entre métodos de cálculo da fronteira de cavitação.

Diferenças entre os dois métodos são observadas quando são comparados os tempos computacionais e a influência do incremento de tempo utilizado. De acordo com os dados representados na tabela K10, o método de Euler proporciona uma redução de tempo computacional de 25% no caso 1 e 10% no caso 2 quando comparado com o método Semi-Implicito, caracterizando uma convergência mais acelerada no processo iterativo de determinação do parâmetro α . Aumentando-se continuamente o valor de incremento de tempo, esta característica se inverte a partir de um determinado instante. Para o caso 2, o uso de um incremento de tempo igual a 0,3 proporciona ao método Semi-Implicito uma redução de 15% no tempo computacional quando comparado com o método de Euler. O uso de

incrementos de tempo maiores que este tendem a diminuir a eficiência de convergência de ambos os métodos, aumentando o tempo computacional requerido na resolução do problema.

Pela figura 28 pode-se observar que o uso de incrementos de tempo muito grandes introduzem pequenos erros no cálculo da fronteira de cavitação. Sugere-se um incremento máximo igual a 0,1. Em carregamentos dinâmicos com carga variável, como o que ocorre nos mancais de máquinas alternativas, é recomendado o uso de incrementos de tempo equivalentes a $0,5^\circ$ de ângulo de manivela, ou seja, $\Delta\tau \cong 0,00873$. O uso de incrementos desta ordem conferem ao método de Euler de determinação da fronteira de cavitação resultados precisos e com baixo tempo de computação. Desta forma o método de Euler será utilizado neste trabalho a partir deste ponto.

Uma observação importante a ser feita é a de que os dois métodos sempre fornecem valores idênticos para a fronteira de cavitação, como pode ser observado na figura 27. Esta característica é válida para todos os incrementos de tempo apresentados na figura 28.

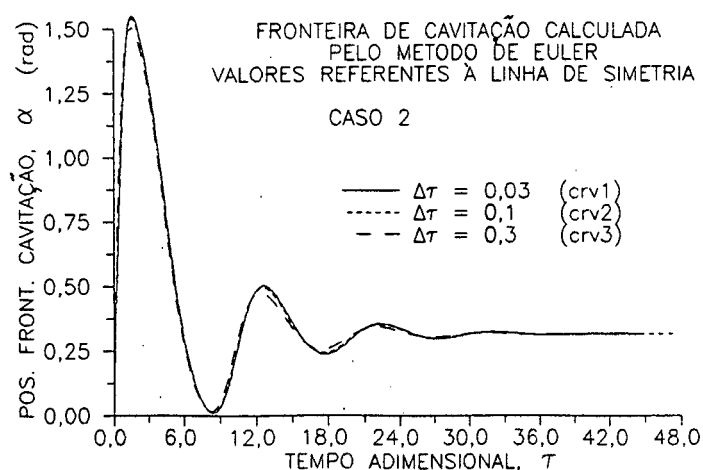


Figura 28 - Influência do incremento de tempo na determinação da fronteira de cavitação.

6.2.2 Avaliação das metodologias para a determinação da trajetória do eixo

No capítulo 3 foram apresentadas quatro metodologias para a determinação da trajetória do eixo, duas delas associadas ao problema em que a massa do eixo possui forte influência na trajetória, devido às forças inerciais desenvolvidas no seu movimento, e duas associadas ao problema em que a massa do eixo pode ser desprezada.

Para o primeiro caso, o movimento do eixo é obtido da solução do sistema de equações diferenciais (65), em que o carregamento possui o mesmo sentido da força peso. A resolução numérica deste sistema de equações diferenciais será realizada utilizando-se os métodos de Euler e Runge-Kutta. Pelo método de Euler, o sistema de equações (96) é resolvido de acordo com o fluxograma da figura 18. Pelo método de Runge-Kutta, o sistema de equações da trajetória toma a forma das equações (97) e é resolvido de acordo com o fluxograma da figura 19.

O método de Runge-Kutta utiliza aproximação de 4^a ordem da equação diferencial e, por este motivo, apresenta resultados mais precisos que o método de Euler que utiliza aproximações de 1^a ordem apenas. Entretanto, para incrementos de tempo menores, o método de Euler tende a tornar-se mais preciso.

O comparativo entre estes dois métodos tem a finalidade de avaliar o desempenho dos mesmos, levando em consideração o tempo computacional requerido na determinação da trajetória, assim como analisar a influência do incremento de tempo na precisão dos resultados.

A figura 29 apresenta as trajetórias do eixo obtidas através das duas metodologias citadas. O incremento de tempo utilizado foi de 0,03 para ambos os métodos. Tomando-se como referência a trajetória obtida pelo método de Runge-Kutta, indiscutivelmente mais preciso, a trajetória obtida pelo método de Euler apresenta um erro máximo na excentricidade igual a 1,43% em $\tau = 10,5$.

Conforme discutido anteriormente, a redução do incremento de tempo diminui os erros relativos entre os dois métodos. Esta característica pode ser observada na figura 30, onde são apresentadas as trajetórias do eixo obtidas

pelos métodos de Euler e Runge-Kutta com incrementos de tempo iguais a 0,01.

Analisando-se o tempo computacional requerido para atingir o regime permanente, verifica-se pela tabela K10, que os dois métodos necessitam praticamente do mesmo tempo. Desta forma, o tempo para atingir o regime permanente é um parâmetro que não pode ser utilizado para avaliação dos métodos.

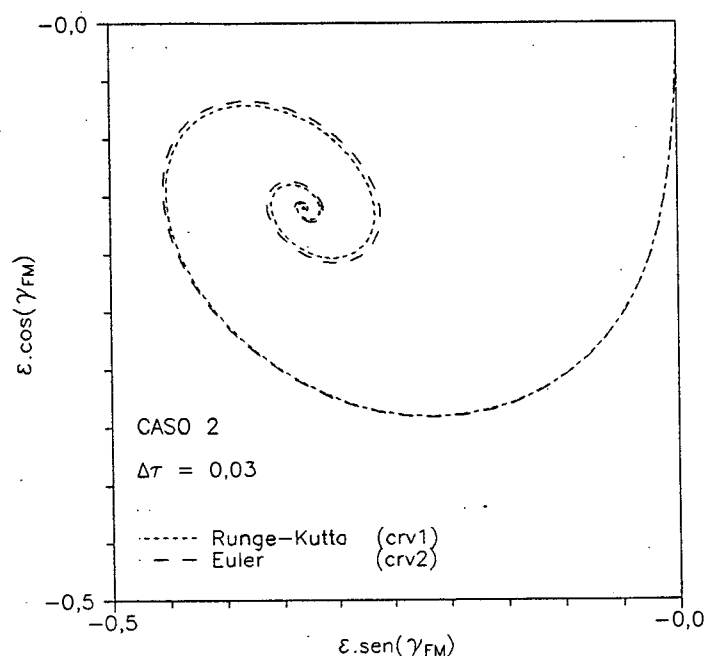


Figura 29 - Comparativo entre os métodos de cálculo da trajetória do eixo para $\Delta\tau = 0,03$ - Considerando a massa do eixo.

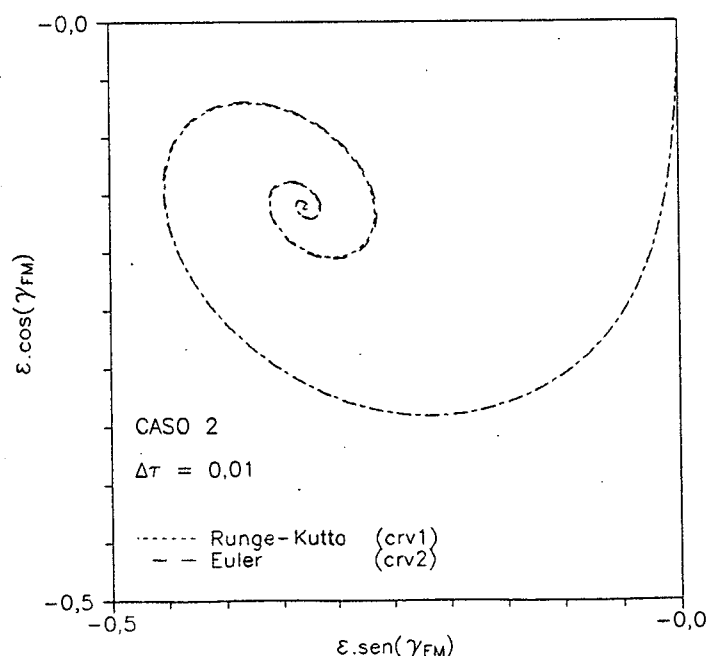


Figura 30 - Comparativo entre os métodos de cálculo da trajetória do eixo para $\Delta\tau = 0,01$ - Considerando a massa do eixo.

O método de Runge-Kutta também mostrou-se eficiente na determinação da trajetória com a utilização de incrementos de tempo maiores que 0,3. O mesmo não acontece com o método de Euler que, com o uso de incrementos da ordem de 0,1, não mais apresentava convergência. Entretanto, esta característica não desmerece o método de Euler, visto que não é aconselhável o uso de incrementos de tempo superiores a 0,1, em função dos erros associados à determinação da posição da fronteira de cavitação.

Baseado no exposto anteriormente o método de Runge-Kutta será utilizado na determinação da trajetória do eixo quando se considera a massa do mesmo. No entanto, deve ser ressaltado que o método de Euler, pela sua simplicidade, pode também ser utilizado sem acarretar erros significativos.

Considere-se agora o problema da determinação da trajetória do eixo quando sua massa puder ser desconsiderada. Neste, caso de acordo com o desenvolvimento apresentado no item 3.4, a trajetória do eixo é obtida através da resolução do sistema de equações (98).

A resolução numérica deste sistema de equações diferenciais será realizada utilizando-se os métodos de Substituição e de Runge-Kutta. Pelo método de Substituição o sistema de equações da trajetória do eixo toma a forma das equações (100) e (101) e é resolvido de acordo com o fluxograma da figura 20. Usando o método de Runge-Kutta o sistema de equações (102) é resolvido segundo o fluxograma da figura 21.

A análise destes dois métodos será feita através da simulação de um mancal radial submetido a um carregamento de intensidade e direções variáveis, de acordo com o diagrama polar apresentado na figura 31. As características geométricas e de operação do mancal referem-se ao caso 3 da Tabela 2.

Ao utilizar-se o método de Substituição, observa-se uma não linearidade associada ao sistema de equações (100). Tais equações são usadas para determinar-se os valores de $\ddot{\epsilon}^*$ e $\dot{\psi}^*$ no instante em consideração τ . Entretanto, $\ddot{\epsilon}^*$ e $\dot{\psi}^*$ estão presentes nas equações da fronteira de cavitação e no termo fonte da equação de Reynolds [33]. Assim sendo, para se obter as forças

hidrodinâmicas necessita-se de $\ddot{\epsilon}^*$ e $\ddot{\psi}^*$ que por sua vez requerem tais forças para sua determinação. Esta não-linearidade é contornada utilizando-se um processo iterativo. Assim, a cada instante de tempo o sistema de equações da trajetória é resolvido diversas vezes, sendo que, após cada iteração, as equações da fronteira de cavitação e de Reynolds são recalculadas utilizando-se os valores mais recentes de $\ddot{\epsilon}^*$ e $\ddot{\psi}^*$.

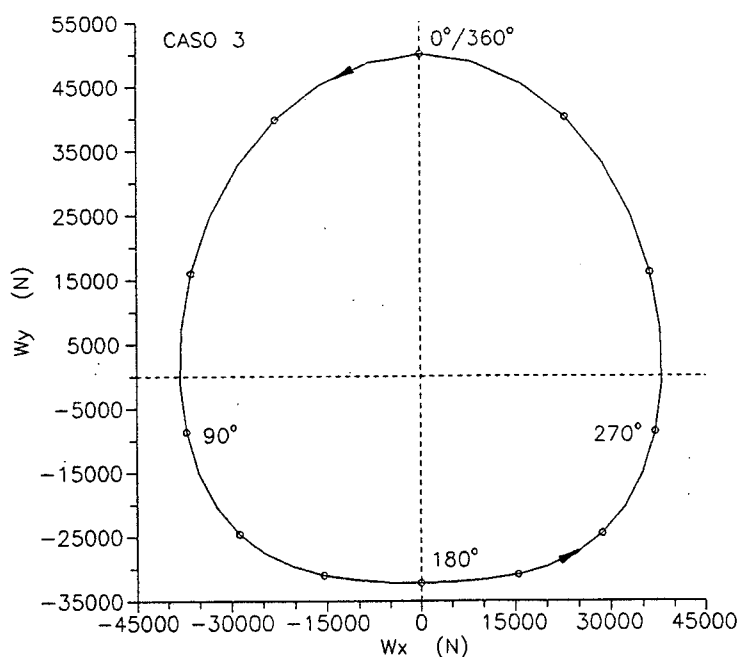


Figura 31 - Diagrama polar do carregamento aplicado ao mancal do caso 3.

Utilizando-se o método de Substituição na determinação da trajetória do eixo quando este é submetido ao carregamento da figura 31, obteve-se convergência da trajetória somente com o uso de um coeficiente de subrelaxação igual a 0,005. Esta trajetória está apresentada na figura 32.

Ao utilizar-se o método de Runge-Kutta, a convergência não foi obtida, mesmo com a redução significativa do incremento de tempo. Desta forma o método de Substituição será utilizado neste trabalho a partir deste ponto.

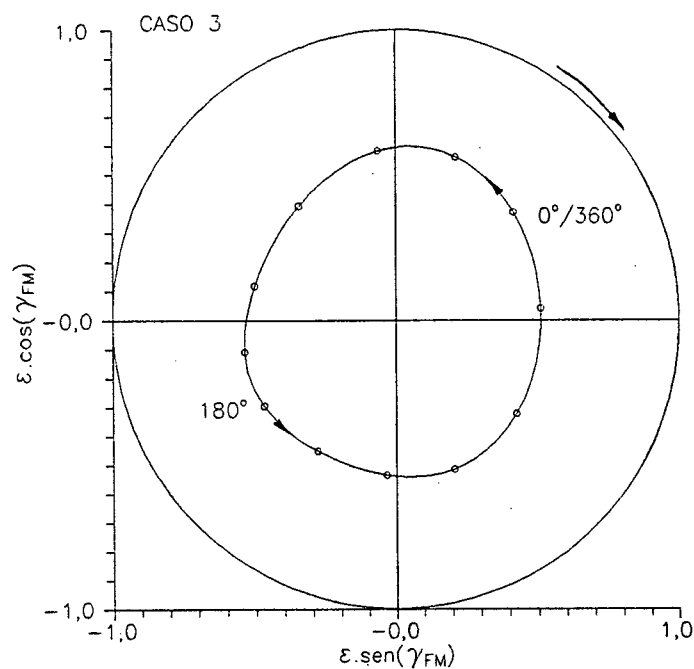


Figura 32 - Trajetória do eixo submetido a um carregamento alternativo - Método de Substituição.

6.3 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Estabelecidas as metodologias mais eficientes na determinação da fronteira de cavitação e da trajetória do eixo, existe a necessidade de validar os resultados obtidos a partir destas metodologias.

Apesar de haver um número considerável de resultados experimentais na literatura especializada, a grande parte destes refere-se ao comportamento de mancais operando em regime permanente (carregamento estático). Adicionalmente, somente alguns trabalhos experimentais são merecedores de confiança, devido à grande dificuldade de isolar as variáveis de interesse. Alguns dos trabalhos

clássicos na área da experimentação estão associados aos nomes de Cole, Hughes, Taylor, Smith e Fuller, bem como aqueles referenciados em [6], no seu Capítulo 15.

As dificuldades encontradas nos trabalhos experimentais de mancais hidrodinâmicos estão associadas, principalmente, à obtenção e manutenção, durante o experimento, das folgas radiais, alinhamento do eixo e balanceamento das partes em rotação. Adicionalmente, existe complicações com relação à transferência de calor, deformações elásticas e em conseguir manter a viscosidade do lubrificante constante ao mesmo tempo em que se alteram outros parâmetros associados ao experimento.

Quando se fala em resultados experimentais associados ao comportamento dinâmico dos mancais, as dificuldades são ainda maiores. Desta forma, a validação do modelo matemático será feita através da comparação com resultados obtidos por outros pesquisadores, utilizando casos considerados como padrões na literatura sobre lubrificação hidrodinâmica.

6.3.1 Mancal submetido a um carregamento dinâmico - Considerando a massa do eixo

Um caso típico em que são analisadas as características dinâmicas de um mancal radial, refere-se ao problema em que o eixo, posicionado concentricamente ao mancal e operando na sua rotação nominal, sofre uma perturbação provocada pela aplicação de uma carga constante em magnitude e direção.

A aplicação desta carga origina um desequilíbrio das forças atuantes no eixo, fazendo com que este se desloque da sua posição inicial até atingir uma nova posição de equilíbrio. O caminho percorrido pelo eixo desde a sua posição inicial até a nova posição de equilíbrio é caracterizado pela trajetória do eixo. A trajetória descrita pelo eixo depende do carregamento e das condições de operação do mancal. Entretanto, para o caso de uma carga

constante subitamente aplicada ao eixo, esta sempre se apresenta na forma de uma espiral. Dependendo da estabilidade do mancal, a espiral pode vir a atingir um novo ponto de equilíbrio ou então divergir continuamente até ocorrer o choque entre o eixo e o mancal.

A validação do modelo numérico será feita através do comparativo da trajetória do eixo para os casos apresentados em [34]. A Tabela 2 reproduz estes mesmos casos representados pelos números 4 e 5, sendo que a única diferença entre eles refere-se à rotação de operação.

Apesar deste mancal operar em um regime de escoamento turbulento, as trajetórias apresentadas nas figuras 33(a) e (b) foram obtidas utilizando a equação de Reynolds em sua formulação laminar, apenas a título de comparação. As consequências advindas do uso de um modelo laminar quando o escoamento é turbulento serão discutidas em seção posterior.

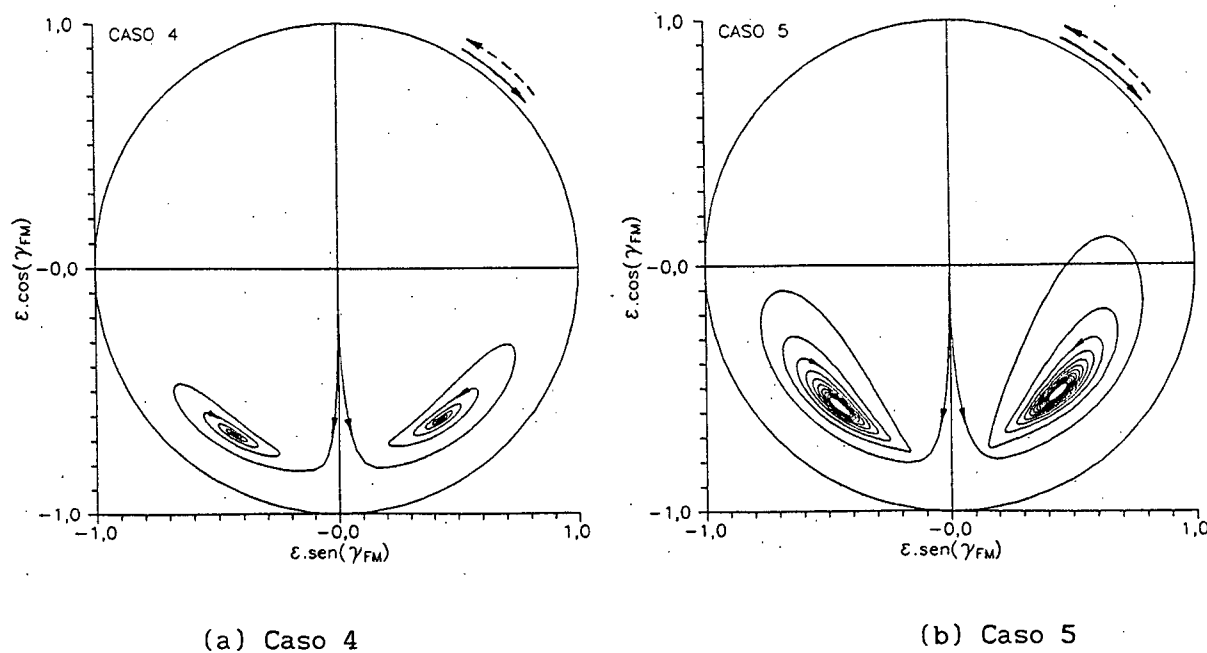


Figura 33 - Trajetória do eixo quando submetido a um carregamento constante - Formulação Laminar.

No quadrante inferior direito das figuras 33(a) e 33(b) são reproduzidas as trajetórias apresentadas em [34]. Para que o eixo apresente

estas trajetórias a sua rotação deve ser em sentido contrário ao apresentado na figura 33. Este recurso foi utilizado para maior clareza na apresentação das trajetórias. As semelhanças entre estas trajetórias e aquelas obtidas no presente trabalho (quadrante inferior esquerdo) corroboram o modelo numérico para mancais submetidos a carregamentos em que a massa do eixo deve ser considerada. As diferenças observadas entre estas trajetórias devem-se ao uso da aproximação de mancal curto no modelo utilizado por [34].

6.3.2 Mancal submetido a um carregamento dinâmico - Desconsiderando a massa do eixo

Conforme discutido em capítulos anteriores, existem situações em que a massa do eixo pode ser desconsiderada quando comparada com a magnitude do carregamento. Esta é uma característica típica dos mancais de máquinas alternativas, em que as forças produzidas pela inércia de componentes em movimento (rotação ou translação) possuem ordem de grandeza bem superior às forças produzidas pela inércia do eixo.

Entretanto, antes de abordar o carregamento alternativo propriamente dito, uma primeira avaliação do modelo numérico pode ser feita a partir da simulação de um mancal radial submetido a alguns carregamentos particulares em que a trajetória do eixo pode ser prevista a partir da análise do termo fonte da equação de Reynolds (20).

No início do Capítulo 2, discutiu-se brevemente os dois mecanismos que geram o campo de pressões em um mancal hidrodinâmico: o efeito cunha, descrito pelo termo $\epsilon \sin \theta [\omega - 2(\omega_L - \dot{\psi})]$, e o efeito de filme espremido, descrito pelo termo $2\dot{\epsilon} \cos \theta$. No termo referente ao efeito cunha, $\dot{\gamma} = \omega_L - \dot{\psi}$ refere-se à velocidade de rotação da linha de centros que, para o caso particular de uma carga de magnitude e rotação constantes, assume o valor da rotação da carga, ou seja, $\dot{\gamma} = \omega_L$.

Uma primeira análise da trajetória do eixo será feita considerando-se

uma carga cuja velocidade angular é igual à metade da velocidade do eixo, ou seja, $\dot{\gamma} = \omega_L = \omega/2$, como esquematizado na figura 34(a). Para este valor de $\dot{\gamma}$, o termo referente ao efeito cunha assume valor zero, ou seja, este mecanismo de geração de pressão deixa de existir, permanecendo apenas o efeito de filme espremido. Nestas circunstâncias, o eixo apresentará uma trajetória helicoidal, aproximando-se gradativamente da parede do mancal.

Esta característica pode ser compreendida com maior facilidade ao fixar-se a carga e aplicar, tanto ao eixo quanto ao mancal, uma rotação igual à rotação original da carga, só que em sentido contrário, conforme indicado na figura 34(b). Nesta figura observa-se que eixo e mancal rotacionam com velocidades angulares iguais em módulo e sentidos contrários. Para esta situação, a vazão líquida de óleo em qualquer seção radial é nula.

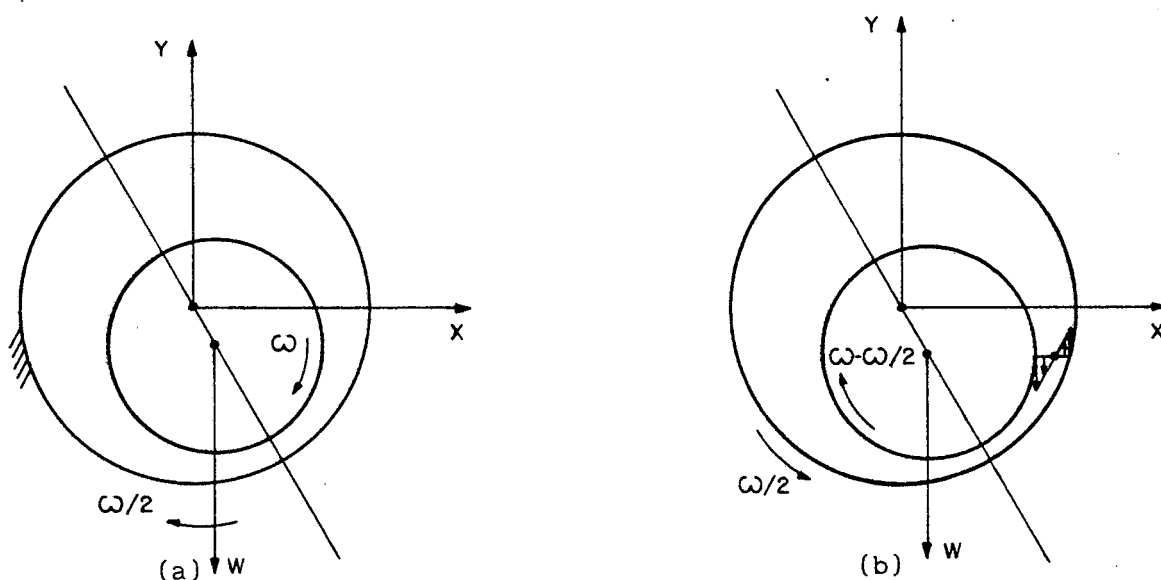


Figura 34 - Análise do carregamento de magnitude e rotação constantes
- Rotação da carga em sentido positivo.

Na figura 35 é apresentada a trajetória do eixo obtida para o mancal do caso 1 (Tabela 2) quando sujeito a um carregamento constante de 21400 N rotacionando a uma velocidade angular de 157,08 rad/s ($\omega_L^* = 1/2$). Nesta figura verifica-se que a trajetória do eixo coincide com as análises feitas para este tipo de carregamento [35].

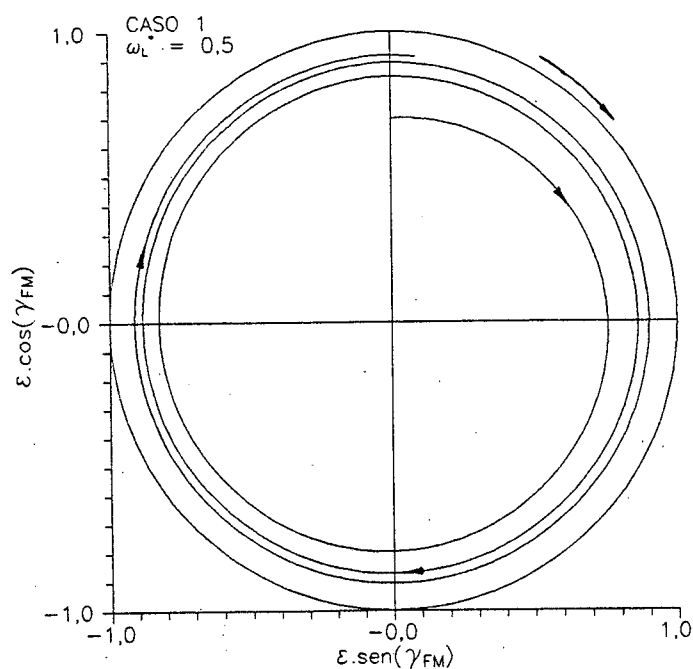
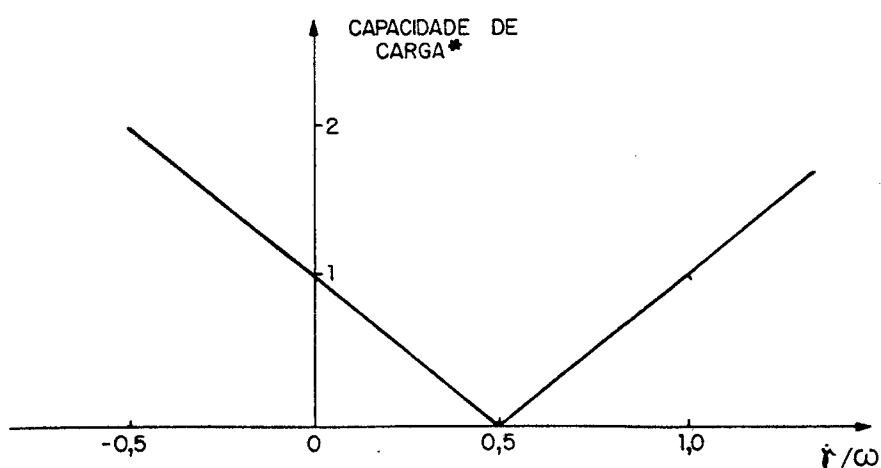


Figura 35 - Trajetória do eixo na ausência do efeito cunha.



* Relativo ao caso de carregamento estático.

Figura 36 - Comportamento da capacidade de carga do mancal com relação à velocidade de rotação da linha de centros.

Uma visão esquemática do comportamento da capacidade de carga do mancal com relação à velocidade de rotação da linha de centros é apresentada na

figura 36 [35]. Conforme discutido anteriormente, o efeito cunha desaparece quando $\dot{\gamma} = \omega/2$. Para valores de $\dot{\gamma} > \omega/2$ o mancal apresenta uma característica interessante, na qual a vazão líquida de óleo flui em sentido contrário à rotação do eixo, o que também produz uma capacidade de sustentação de carga gerada por efeito cunha. Nestas condições de operação faz-se necessária a utilização de uma subrotina específica, visto que a cavidade convergente desenvolve-se no sentido negativo de θ .

Um carregamento que rotaciona em sentido contrário ao de rotação do eixo, ou seja, $\omega_L < 0$, provoca um aumento na capacidade de carga do mancal. Isto ocorre pelo aumento da velocidade relativa entre eixo e mancal, o que promove uma maior vazão de óleo no sentido da cavidade convergente. Tal fator proporciona uma elevação das pressões geradas pelo filme de óleo, implicando diretamente no aumento da capacidade de carga do mancal quando comparada com aquela do mesmo mancal em sua posição de equilíbrio (carregamento estático). Retornando à figura 36, pode-se observar que, para qualquer valor de $\dot{\gamma} < 0$, a capacidade de carga é aumentada. A figura 37 traduz o efeito provocado por uma carga rotacionando em direção contrária à rotação do eixo.

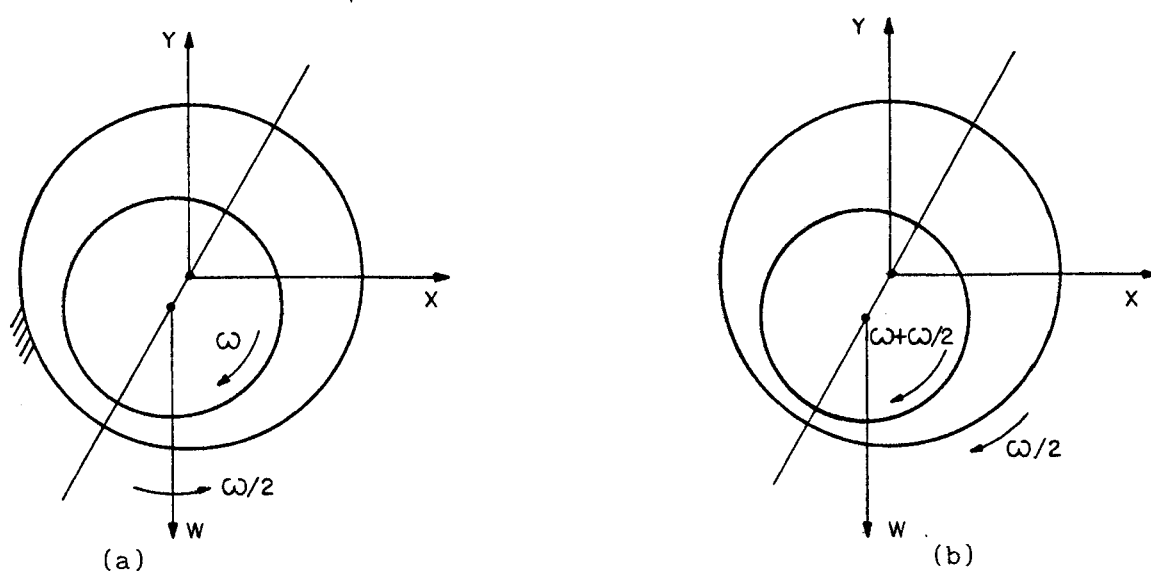


Figura 37 - Análise do carregamento de magnitude e rotação constantes - Rotação da carga em sentido negativo.

A figura 38 apresenta a trajetória do eixo para o mesmo caso analisado na figura 35, ou seja, caso 1, em que a carga, constante e igual a 21400 N, rotaciona em sentido contrário à rotação do eixo. O aumento da capacidade de carga é traduzido pela menor excentricidade do eixo ($\epsilon = 0,262$) quando comparada com a excentricidade da posição de equilíbrio deste mancal ($\epsilon = 0,633$).

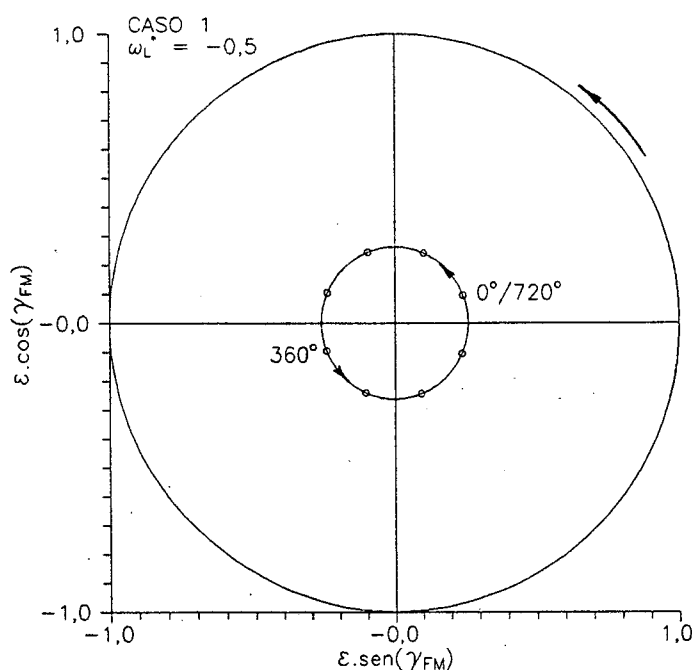


Figura 38 - Trajetória do eixo quando $\omega_L = -\omega/2$.

De acordo com as discussões e resultados apresentados até então, o modelo numérico mostrou-se eficiente na simulação de mancais submetidos a carregamentos dinâmicos simples. Existe, ainda, a necessidade de validar o modelo na simulação de mancais submetidos a carregamentos alternativos. Para tal, será utilizado o mancal e carregamento apresentados em [19].

O mancal a ser analisado refere-se ao mancal principal intermediário de um motor a gasolina (4 tempos) de 1,8 litros e 4 cilindros. As dimensões e condições de operação são fornecidas na tabela 2 (caso 6) e o carregamento é reproduzido na figura 39, onde se observa sua grande complexidade.

A trajetória do eixo, apresentada na figura 40, refere-se à simulação do mancal em que não são consideradas características especiais de alimentação de óleo, ou seja, não é considerada a presença de canais ou ranhuras de alimentação de óleo e a pressão de alimentação de óleo é considerada como sendo a pressão ambiente.

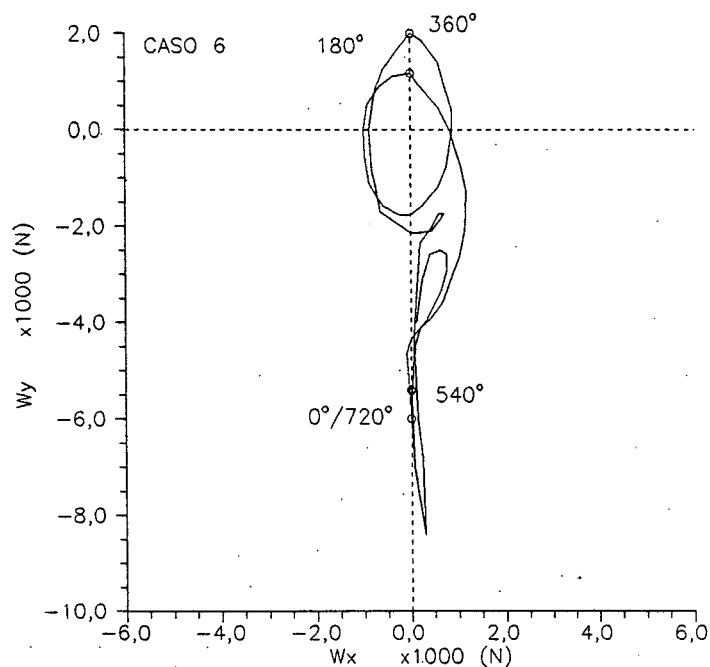


Figura 39 - Diagrama polar do carregamento aplicado ao mancal do caso 6.

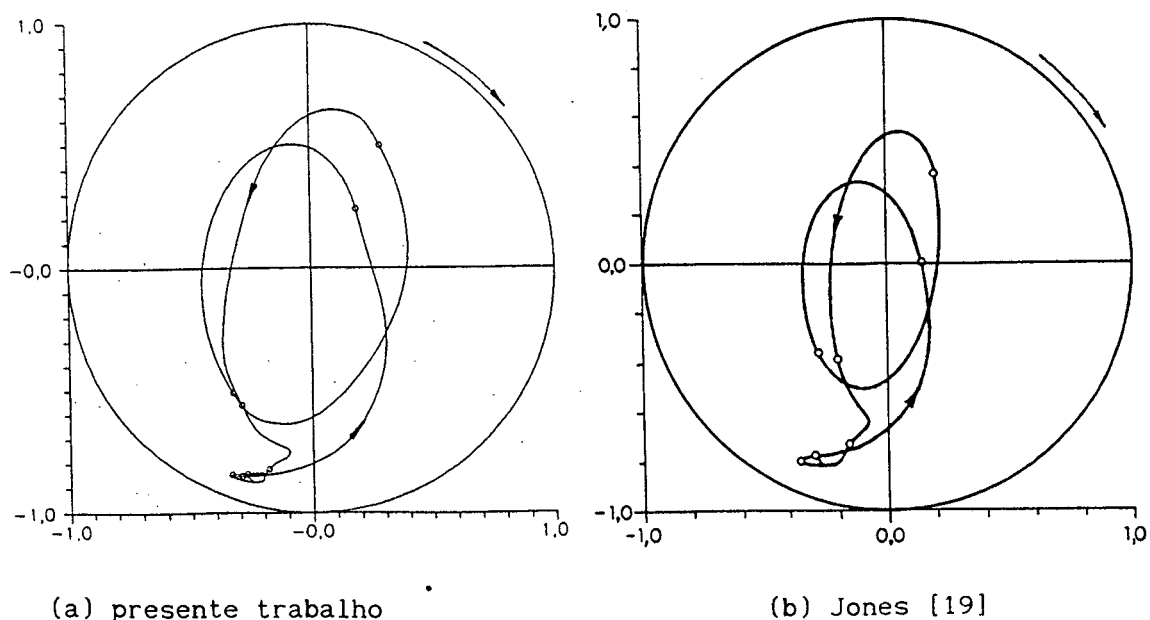


Figura 40 - Comparativo da trajetória do eixo para o caso 6 quando submetido ao carregamento da figura 39.

A semelhança com a trajetória obtida pelo modelo de Jones [19] é muito boa. Ótima concordância também é obtida para a variação da posição de mínima espessura do filme de óleo e vazões laterais, apresentadas nas figura 41 e 42, respectivamente.

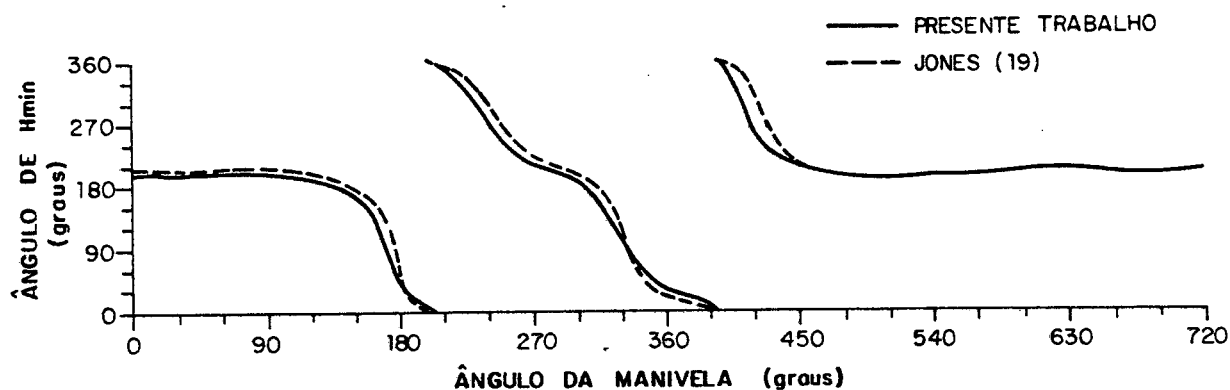


Figura 41 - Comparativo da variação da posição de mínima espessura do filme de óleo - Caso 6.

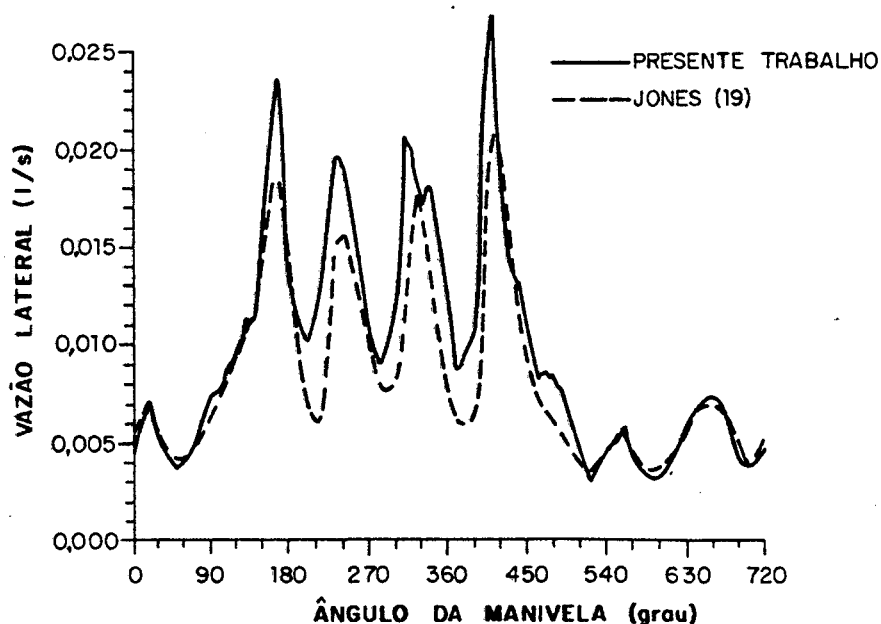


Figura 42 - Comparativo da vazão lateral de óleo - Caso 6.

A figura 43 apresenta o perfil do campo de pressão, na linha de simetria do mancal ($\xi = L/D$), em diferentes posições do eixo de manivelas. Observa-se que as maiores pressões desenvolvem-se entre 540° e 90° do eixo de manivelas, chegando a valores próximos a 14,0 MPa.

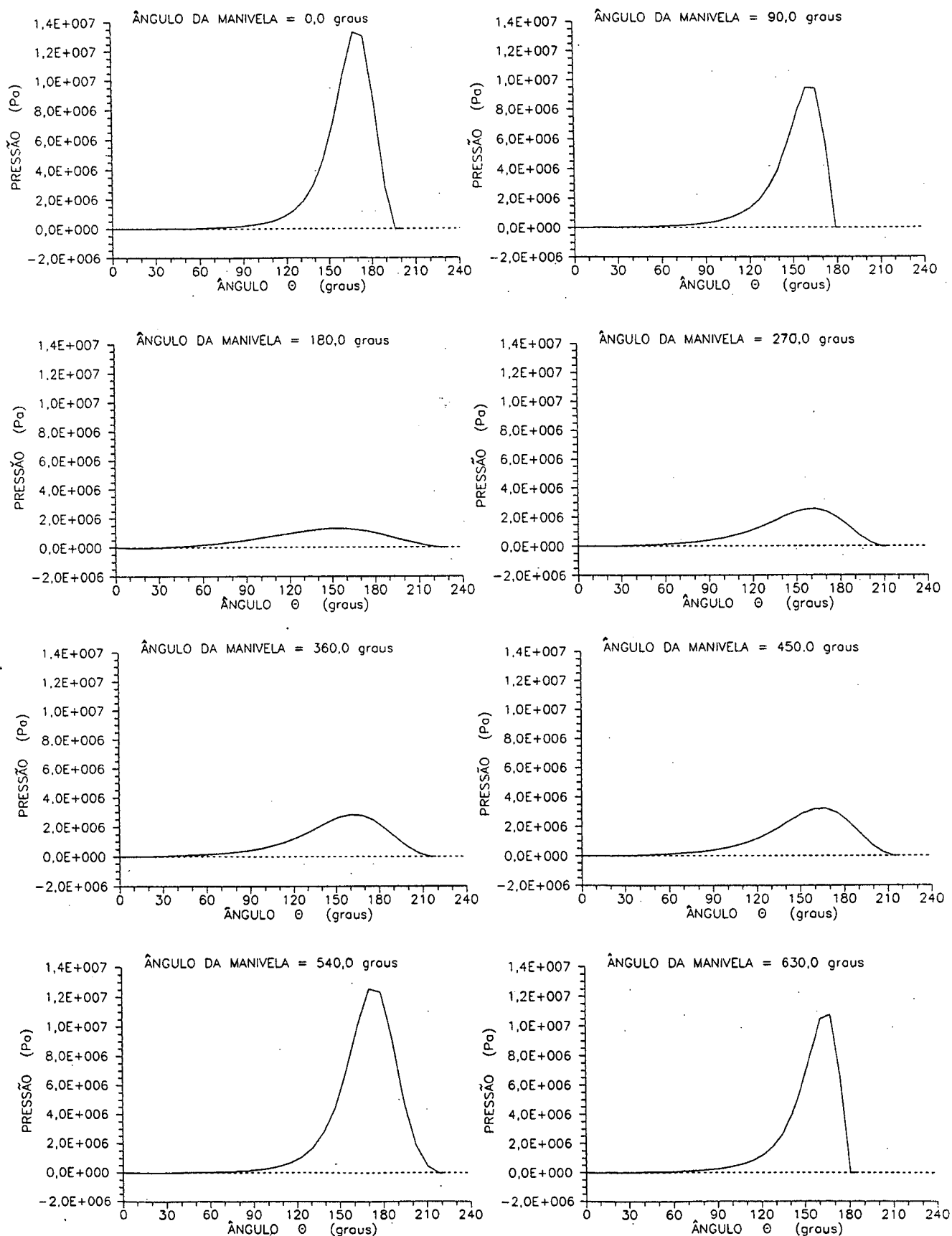


Figura 43 - Evolução do campo de pressão na linha de simetria do mancal em diversos instantes do ciclo de carregamento da figura 39.

Na região adjacente à fronteira de cavitação a pressão assume valores negativos da ordem de $1,0 \times 10^{-4}$ Pa, não sendo, portanto, perceptível nos gráficos da figura 43. Entretanto, a presença desta região de pressões negativas está de acordo com os resultados experimentais, apresentados esquematicamente pela figura 11.

Até agora, assumiu-se que as malhas de 40 pontos na direção circunferencial seriam as mais adequadas para o carregamento dinâmico em que a massa do eixo não é considerada. A adoção desta malha baseou-se nos testes realizados para carregamentos em que a massa do eixo não pode ser desprezada, de acordo com o item 6.1.1. Avaliando os resultados obtidos para o caso 6 em que se utilizou uma malha de 20x11 pontos, pode ser observado, na figura 44, que as diferenças existentes entre as trajetórias obtidas com esta malha e a de 40x21 pontos são muito pequenas.

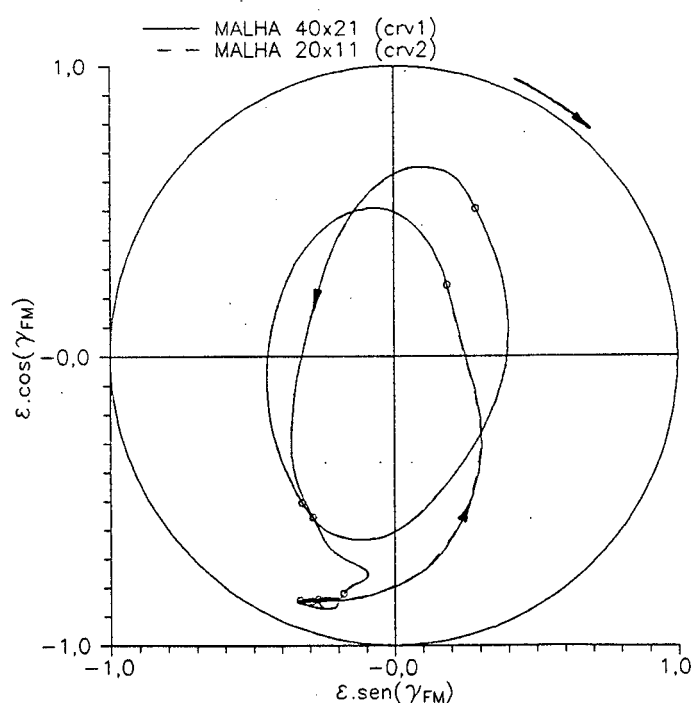


Figura 44 - Comparativo de malhas para o caso 6.

Para valores de excentricidade, o erro máximo apresentado entre estas malhas foi de 0,88%, e para a vazão, obteve-se um erro máximo de 7,72%. Desta forma pode-se concluir que, neste tipo de carregamento, a utilização de uma malha mais grosseira possui pouca influência sobre a trajetória do eixo.

6.4 ANÁLISE DE MANCAIS EM ESCOAMENTO TURBULENTO

Tomando-se como referência o número de Reynolds crítico, estabelecido pela equação (41), observa-se que os mancais estudados até o presente momento enquadram-se na faixa de escoamento laminar. Entretanto, esta não é uma característica comum a todos os mancais, conforme observado no Capítulo 2.

A introdução dos coeficientes turbulentos na equação de Reynolds, conforme descrito no item 2.2, tem a finalidade de ampliar a faixa de estudo dos mancais radiais, possibilitando, a simulação daqueles que operam em um regime de escoamento turbulento.

Conhecido o número de Reynolds crítico, este se torna uma referência na escolha do modelo a ser utilizado na simulação do mancal. Conforme discutido anteriormente, a equação de Reynolds na sua forma discretizada (68), pode ser utilizada para o regime laminar atribuindo-se para a variável Re , presente nos coeficientes turbulentos (49), o valor zero.

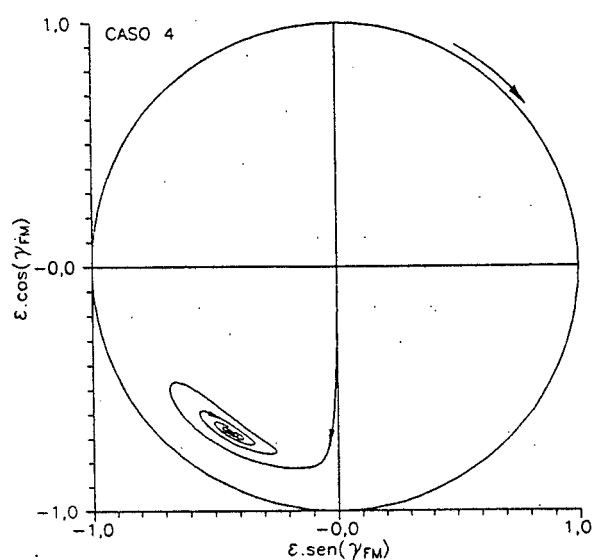
A análise de um mancal que opera em regime turbulento através de um modelo baseado numa formulação laminar leva a resultados e interpretações errôneas do comportamento deste mancal. Conforme observado por Hashimoto et al. [34] para mancais curtos e por Manke et al. [36] para mancais finitos a introdução dos coeficientes turbulentos torna o mancal menos estável, indicando que a turbulência influi significativamente no comportamento dinâmico dos mancais.

Nas figuras 45 e 46 podem ser observadas as diferenças entre as trajetórias obtidas a partir do uso das formulações laminar e turbulenta para os casos 4 e 5, respectivamente.

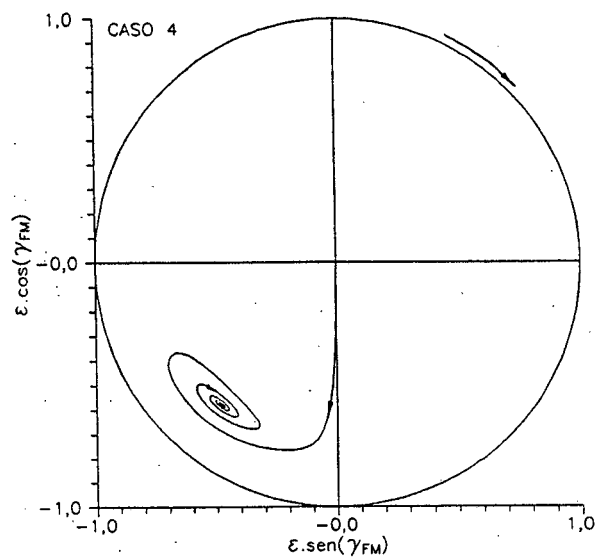
A figura 46, em particular, mostra como o uso de formulação laminar pode fornecer resultados completamente distorcidos. O modelo laminar fornece uma trajetória estável quando, na verdade, a situação é instável.

O uso dos coeficientes turbulentos na equação de Reynolds não garante total confiabilidade aos resultados, mas apenas uma boa aproximação, visto que,

nesta faixa de números de Reynolds elevados, a inércia do fluido nem sempre pode ser desconsiderada.

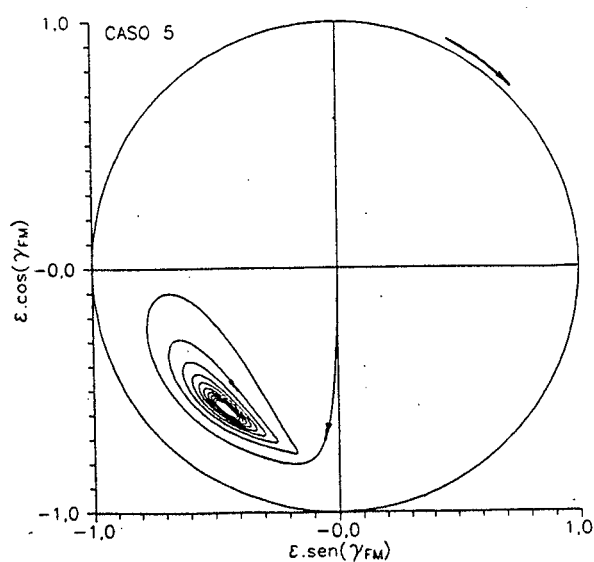


(a) laminar

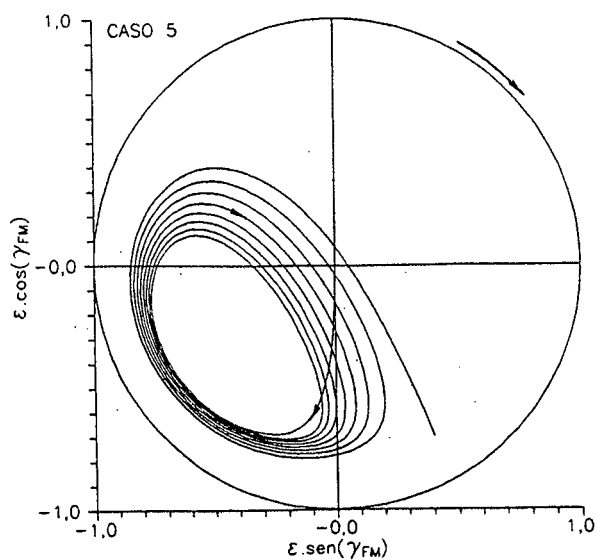


(b) turbulenta

Figura 45 - Trajetória do eixo utilizando-se formulações laminar e turbulenta - Caso 4.



(a) laminar



(b) turbulenta

Figura 46 - Trajetória do eixo utilizando-se formulações laminar e turbulenta - Caso 5.

A manutenção dos termos de inércia na formulação do problema torna a sua resolução bem mais complexa. Existe vários trabalhos na literatura que tratam, especificamente, da influência da inércia do fluido. De acordo com estes trabalhos constata-se que o número de Reynolds reduzido, $Re^* = Re(c/R)$, é o parâmetro que traduz a importância dos efeitos de inércia. Em um carregamento estático, para valores de $Re^* > 15$ os efeitos de inércia do fluido tendem a influir, principalmente, na distribuição de pressão, vazão lateral e ângulos de atuação [37].

No carregamento dinâmico, os efeitos de inércia contribuem na estabilidade do eixo em certas condições de operação [18]. Desta forma, o uso de um modelo turbulento no qual os efeitos de inércia não estão incluídos deve ser utilizado com algumas restrições, principalmente para altos valores do número de Reynolds reduzido.

6.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE MANCAL FINITO E MANCAL CURTO

O modelo matemático que se baseia na aproximação de mancal curto já foi amplamente discutido na literatura, sendo que uma das conclusões a que se chegou refere-se ao baixo tempo computacional requerido na simulação de mancais radiais.

Devido a esta característica, optou-se em incluir um modelo baseado nesta aproximação, o mesmo podendo ser utilizado em avaliações preliminares do comportamento dinâmico de mancais radiais.

No Capítulo 4 foram apresentadas as equações analíticas do campo de pressões e da força hidrodinâmica, assim como o sistema de equações diferenciais que fornece a trajetória do eixo. A partir destas equações é possível determinar-se as características operacionais do mancal em análise, tais como as vazões laterais, torque resistente, espessura mínima do filme de

óleo, etc.

A potencialidade deste modelo pode ser observada na figura 47, onde é apresentada a trajetória do eixo para o mancal especificado pelo caso 6 da tabela 2 e submetido ao carregamento da figura 39. A comparação entre esta trajetória e aquela apresentada na figura 40 mostra uma semelhança razoável entre ambas, com a vantagem do modelo de mancal curto ter consumido um tempo computacional de 0,06 segundos contra os 86 minutos do modelo de mancal finito.

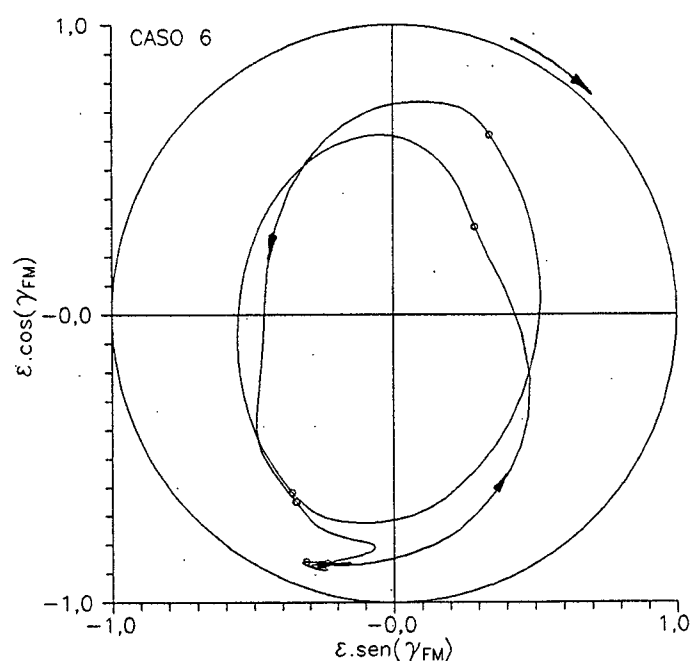


Figura 47 - Trajetória do eixo obtida com o modelo de mancal curto - Caso 6.

Um dos motivos da semelhança entre as figuras 40 e 47 ser apenas razoável se deve à relação largura/diâmetro (L/D) deste mancal estar acima de $1/4$. Para valores de $L/D < 1/4$ a aproximação de mancal curto fornece bons resultados.

Um comparativo entre as previsões da vazão lateral obtidas a partir dos modelos de mancal finito e curto é apresentado na figura 48. Observa-se que o modelo de mancal curto superestima a vazão lateral, fato este devido à previsão do mancal operar com uma excentricidade maior durante todo o ciclo, originando gradientes de pressão mais acentuados na direção axial.

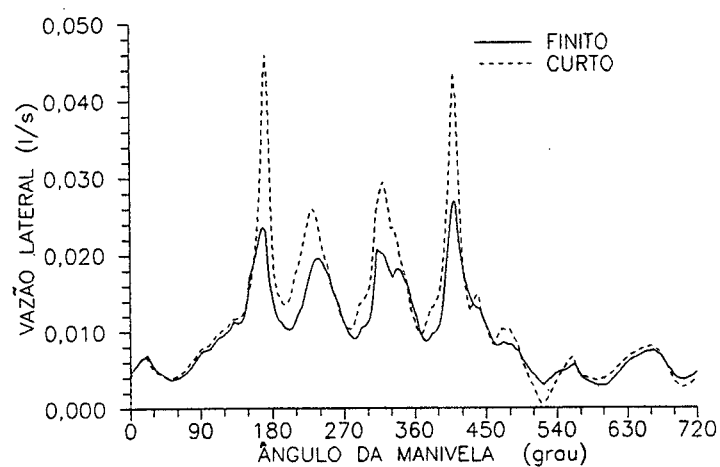


Figura 48 - Comparativo da vazão lateral obtida pelos modelos de mancal finito e mancal curto.

Deve ser frisado aqui que a grande parte dos mancais reais encontra-se na faixa $4 > L/D > 1/4$. Nestes casos, os modelos que usam as aproximações de mancal curto e mancal longo não apresentam bons resultados, justificando-se o uso de um modelo de mancal finito.

7. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi apresentada uma metodologia numérica para determinação das características operacionais de mancais radiais submetidos a diversos tipos de carregamento. Para tal, utilizou-se um modelo bidimensional em que a equação de Reynolds foi integrada numericamente utilizando-se o método dos volumes finitos. Quando submetido a um carregamento dinâmico, a análise do mancal requereu, adicionalmente, a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias para determinação da trajetória do eixo. Para a resolução deste sistema de equações da trajetória foram apresentadas e testadas várias metodologias.

O modelo aqui proposto também considera a presença da cavitação do óleo sendo que, para tal, foi requerido o desenvolvimento de uma equação que fornecesse a localização da fronteira de cavitação. Nesta equação, formulada a partir de um balanço de massa nos volumes adjacentes à fronteira de cavitação, a variável de interesse aparece de forma implícita, sendo necessário o uso de um procedimento iterativo para sua determinação. Três metodologias para a determinação da posição da fronteira de cavitação foram apresentadas e analisadas: o método Estático, de Euler e Semi-Implícito.

Com a finalidade de ampliar a faixa de aplicabilidade do modelo numérico, foi utilizado um modelo algébrico de turbulência. Este modelo possui

a vantagem adicional de permitir a análise de escoamentos laminares a partir do estabelecimento de valores particulares para determinadas variáveis.

Adicionalmente, o presente trabalho apresentou as equações analíticas do campo de pressões e forças hidrodinâmicas obtidas a partir do uso da aproximação de mancal curto. Estas equações, aplicadas ao sistema de equações diferenciais da trajetória do eixo, permitiram a simulação de mancais curtos ($L/D < 1/4$) submetidos a carregamentos dinâmicos. O modelo numérico, baseado nesta aproximação, forneceu resultados com tempos computacionais muito abaixo daqueles associados ao mancal finito, retendo uma precisão satisfatória.

Da análise dos resultados obtidos a partir do uso das diversas metodologias e modelos apresentados, as seguintes conclusões puderam ser obtidas:

(a) Com relação à determinação da fronteira de cavitação:

- o método Estático, onde o termo referente à variação temporal da fronteira de cavitação permanece no termo fonte, mostrou-se eficiente apenas na simulação de carregamentos estáticos;

- os métodos de Euler e Semi-Implicito fornecem resultados idênticos, sendo que o primeiro apresentou uma convergência mais eficiente, para incrementos de tempo abaixo de $\tau = 0,1$. Isto pode ser verificado pelo menor tempo computacional consumido, que em alguns casos atingiu uma redução de até 25%.

(b) Com relação à determinação da trajetória do eixo:

- quando a massa do eixo foi considerada, os métodos de Euler e Runge-Kutta apresentaram diferenças entre si em torno de 1% para o valor da excentricidade (no caso analisado). Os tempos computacionais requeridos pelos dois métodos foram praticamente os mesmos, tendo sido adotado o método de Runge-Kutta pela melhor precisão inerente ao método;

- quando a massa do eixo não foi considerada, o método de Runge-Kutta

não se mostrou eficiente, a ponto de não apresentar convergência;

- com o uso do método de Substituição, a convergência só foi alcançada com a introdução de coeficientes de sub-relaxação inferiores a 0,01, exigindo valores cada vez menores quando eram utilizadas malhas mais refinadas.

(c) Com relação às malhas computacionais:

- na simulação de mancais submetidos a carregamento estático, os resultados obtidos com malhas de 30 pontos na direção circunferencial apresentaram erros relativos da ordem de 1,0% quando comparados com malhas mais refinadas. Para a direção axial observou-se a necessidade de um número maior de pontos para a relação L/D crescentes, conforme esperado.

- no carregamento dinâmico, quando a massa do eixo foi considerada, verificou-se a necessidade de 40 pontos na direção circunferencial. Quando a massa do eixo não foi considerada, observou-se que o uso de malhas mais grosseiras, como as de 20 pontos na direção circunferencial, apresentam resultados muito próximos daqueles obtidos com malhas mais refinadas.

(d) Com relação aos critérios de convergência:

- verificou-se que a avaliação da convergência através do cálculo do erro relativo associado a cada volume acarretava um número excessivo de iterações sem contribuir para um aumento da precisão dos resultados. Em função disto, foi sugerido o uso de um critério de erro relativo modificado, levando-se em consideração a variação da propriedade em análise relativamente ao valor máximo encontrado no domínio de solução.

(e) Com relação ao modelo turbulento:

- verificou-se que o seu uso confere ao eixo uma maior instabilidade quando comparado aos resultados obtidos com um modelo laminar. Entretanto, este modelo turbulento ainda não pode ser considerado completo, pois não inclui os termos de inércia do fluido, importantes em escoamentos a altos números de

Reynolds.

(f) Com relação ao modelo baseado na aproximação de mancal curto:

- este modelo apresentou uma característica fundamental: o baixo tempo computacional requerido na obtenção de resultados. Entretanto, este modelo deve ser utilizado com restrições, pois apresenta resultados satisfatórios apenas na simulação de mancais com relação L/D inferior a $1/4$.

Baseado nas conclusões acima, pode-se afirmar que a metodologia proposta, embora tenha se mostrado versátil, apresenta o inconveniente de requerer baixos coeficientes de sub-relaxação para a simulação de mancais submetidos a um carregamento dinâmico, quando a massa do eixo pode ser desconsiderada. Devido a esta forte sub-relaxação, os tempos computacionais requeridos na simulação destes mancais podem chegar a 1 hora de CPU em um computador IBM 3090. Deve ser observado que esta sub-relaxação se fez necessária pelas não-linearidades associadas às equações da trajetória e da fronteira de cavitação. Quando é adotado o modelo de mancal curto, em que a cavitação do óleo não é considerada, este problema não existe.

Uma das grandes vantagens do modelo numérico apresentado neste trabalho refere-se a sua versatilidade na simulação de mancais radiais sujeitos às mais diversas condições de operação, tais como carregamentos estáticos e dinâmicos, e escoamentos em regime laminar e turbulento. A validação do modelo para estas diversas situações de carregamentos e escoamentos do lubrificante, baseou-se na comparação das características operacionais obtidas por este modelo com informações disponíveis na literatura. Para todos os casos analisados, uma boa concordância foi verificada.

Deve ser ressaltado que o modelo apresentado, apesar da variedade de situações possíveis de serem analisadas, ainda é um modelo simples. Características especiais, mas freqüentes em mancais reais, tais como ranhuras axiais e circunferenciais, canais de alimentação de óleo e mancais elípticos ou

usinados com outros formatos especiais, não são consideradas no modelo, mas podem ser incorporadas através do desenvolvimento de subrotinas especiais.

O comportamento térmico do mancal também pode ser analisado através do acoplamento, ao modelo, da equação da energia. Um modelo relativamente fácil de ser implementado é o modelo adiabático, no qual se considera que todo o calor gerado internamente no mancal é carregado pelo fluido.

Modelos mais refinados, nos quais se considera a inércia do fluido ou as deformações elásticas do mancal, já foram desenvolvidos e relatados na literatura. Este último, conhecido como modelo de lubrificação elastohidrodinâmica, requer a resolução simultânea de dois domínios de solução, um referente ao fluido lubrificante e outro referente à estrutura do mancal. Observa-se, com estes exemplos, que existe várias frentes possíveis de serem adotadas em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HERSEY, M. D., "Theory and Research in Lubrication", John Wiley & Sons Inc., USA, 1966.
- [2] CAMERON, A., "Principles of Lubrication", Longmans Green & Co. Ltd., London, 1966.
- [3] TOWER, B., "First Report on Friction Experiments", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, pp. 632-659, Nov., 1883.
- [4] REYNOLDS, O., "On the Theory of Lubrification and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil", Philosophical Transactions of the Royal Society, vol. 177, pp. 157-234, 1886.
- [5] PINKUS, O., "The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication", Journal of Tribology, vol. 109, pp. 2-20, 1987.
- [6] PINKUS, O. and STERNLICHT, B., "Theory of Hydrodynamic Lubrication", McGraw-Hill Book Company Inc., USA, 1961.
- [7] SOMMERFELD, A., "Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung", Z. Math. u. Physik, vol. 50, p. 97, 1904.
- [8] MICHELL, A. G. M., "The Lubrication of Plane Surfaces", Z. Math. u. Physik, vol. 132, p. 123, 1905.

- [9] NEWKIRK, B. L. and TAYLOR, H. D., "Shaft Whipping Due to Oil Action in Journal Bearings", General Electric Review, vol. 28, n. 8, pp. 559-568, 1925.
- [10] CAMPBELL, J., LOVE, P. P., MARTIN, F. A. and RAFIQUE, S. O., "Bearings for Reciprocating Machinery: A Review of the Present State of Theoretical, Experimental and Service Knowledge", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 182, Part 3A, pp. 51-74, 1967/1968.
- [11] BOOKER, J.F., " Dynamically Loaded Journal Bearing: Mobility Method of Solution", Journal of Basic Engineering, vol. 87, pp. 537-546, 1965.
- [12] BOOKER, J. F., Dynamically Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method", Journal of Lubrication Technology, vol. 93, pp. 168-176, 1971.
- [13] MARTIN, F. A., "Developments in Engine Bearings Design", Tribology International, vol. 16, n. 3, pp. 147-164, 1983.
- [14] CONSTANTINESCU, V. N., "Analysis of Bearing Operating in the Turbulent Regime", Journal of Basic Engineering, vol. 84, n. 1, pp. 139-151, 1962.
- [15] NG, C. W. and PAN, C. H. T., "A Linearized Turbulent Lubrication Theory", Journal of Basic Engineering, vol. 87, n. 3, pp. 675-688, 1965.
- [16] WADA, S. and HASHIMOTO, H., "Turbulent Lubrication Theory Using the Frictional Law", Parts 1 and 2, Bulletin of the JSME, vol. 22, n. 164, pp. 249-256, 257-263, 1979.
- [17] HASHIMOTO, H. and WADA, S., "An Influence of Inertia Forces on Stability of Turbulent Journal Bearings", Bulletin of the JSME, vol.25, n. 202, pp. 653-662, 1982.

- [18] HASHIMOTO, H., WADA, S. and SUMITOMO, M., "The Effects of Fluid Inertia Forces on the Dynamic Behavior of Short Journal Bearings in Superlaminar Flow Regime", Journal of Tribology, vol. 110, pp. 539-547, 1988.
- [19] JONES, G. J., "Crankshaft Bearings: Oil Film History", Proceedings of the 9th Leeds-Lyon Tribology Symposium, pp. 83-88, 1982.
- [20] LABOUFF, G. A. and BOOKER, J. F., "Dynamically Loaded Bearings: A Finite Element Treatment for Rigid and Elastic Surfaces", Journal of Tribology, vol. 107, pp. 505-515, 1985.
- [21] XU, H. and SMITH, E. H., "A New Approach to the Solution of Elastohydrodynamic Lubrication of Crankshaft Bearings", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 204, pp. 187-197, 1990.
- [22] COYNE, J. C. and ELROD Jr, H. G., "Conditions for the Rupture of a Lubricating Film. Part 1: Theoretical Model", Journal of Lubrication Technology, vol. 92, pp. 451-456, 1970.
- [23] COYNE, J. C. and ELROD Jr, H. G., "Conditions for the Rupture of a Lubricating Film. Part 2: New Boundary Conditions for Reynolds Equation", Journal of Lubrication Technology vol. 94, pp. 156-167, 1971.
- [24] SAVAGE, M. D., "The Zero Pressure Gradient Condition", Journal of Tribology, vol. 107, pp. 252-255, 1985.
- [25] PRATA, A. T. and FERREIRA, R. T. S., "The Accuracy of Short Bearing Theory in Presence of Cavitation", Journal of Tribology, vol. 112, pp. 650-654, 1990.

- [26] LANG, O. R., "Oil Film Rupture Under Dynamic Load? Reynolds Statement and Modern Experience", Proceedings of the 13th Leeds-Lyon Symposium of Tribology, pp. 467-472, 1986.
- [27] PATANKAR, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [28] SABEDOTTI, S.L., "Simulação de Mancais Através do Método de Elementos Finitos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- [29] BARROSO, L.C., "Cálculo Numérico", 2ª edição, Editora Harbra, São Paulo, 1987.
- [30] WHITE, F.M., "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill, 1974.
- [31] PRATA, A.T., FERREIRA, R.T.S., LILIE, D.E.B e BORTOLI, M.G.D., "Carregamento de Mancais Radiais: Análise Pelo Método dos Volumes Finitos com Coordenadas Adaptadas às Fronteiras", Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM, vol. II, pp. 717-720, 1987.
- [32] PRATA, A.T., FERREIRA, R.T.S., LILIE, D.E.B and BORTOLI, M.G.D., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Finite Volume Method Analysis", Proceedings of the International Compressor Engineering Conference at Purdue, vol. I, pp. 34-41, 1988.
- [33] JAKEMAN, R.W., "The Influence of Cavitation on the Non-Linearity of Velocity Coefficients in a Hydrodynamic Journal Bearing", Proceedings of the 13th Leeds-Lyon Symposium of Tribology, pp. 473-480, 1986.
- [34] HASHIMOTO, H., WADA, S. and ITO, J., "An Application of Short Bearing Theory to Dynamic Characteristic Problems of Turbulent Journal Bearings". Journal of Tribology, vol. 109, pp. 307-314, 1987.

- [35] BORTOLI, M.G.D., Comunicação particular, abril/1991.
- [36] MANKE, A.L., PRATA, A.T. e FERREIRA, R.T.S., "Efeito de Cavitação no Carregamento Dinâmico de Mancais Radiais Turbulentos", Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas - ENCIT, vol. I, pp. 495-500, 1990.
- [37] WADA, S. and HASHIMOTO, H., "Turbulent Lubrification Theory Using the Frictional Law", 3rd Report, Bulletin of the JSME, vol. 22, n. 171, pp. 1329-1335, 1979.

APÊNDICE A

EQUAÇÃO DE REYNOLDS DA LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA

A equação de Navier-Stokes para um fluido com densidade e viscosidade constantes é dada por,

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g} \quad (\text{A.1})$$

Considerando a direção x em um sistema cartesiano ortogonal tem-se,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (\text{A.2})$$

Aplicando as hipóteses simplificativas assumidas por Reynolds (hipóteses a-h do item 1.2) obtém-se,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{A.3})$$

A integração da equação (A.3) ao longo da espessura do filme de óleo (direção z), fornece:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 \quad (\text{A.4})$$

As seguintes condições de contorno se aplicam às duas superfícies que se movem com velocidades U_1 e U_2 .

$$\text{i) } u = U_2 \quad \text{em } z = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$\text{ii) } u = U_1 \quad \text{em } z = h \quad (\text{A.5b})$$

onde $h = h(x)$ é a espessura do filme de óleo.

Aplicando as condições de contorno (A.5a) e (A.5b) na equação (A.4) tem-se,

$$c_1 = \frac{U_1 - U_2}{h} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \quad (\text{A.6a})$$

$$c_2 = U_2 \quad (\text{A.6b})$$

e portanto,

$$u(x, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(z^2 - zh \right) + (U_1 - U_2) \frac{z}{h} + U_2 \quad (\text{A.7})$$

A vazão de lubrificante na direção x pode agora ser obtida por,

$$q_x = \int_0^h u dz = - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + (U_1 + U_2) \frac{h}{2} \quad (\text{A.8})$$

Adotando-se um procedimento similar para a direção y , tem-se,

$$q_y = \int_0^h v dz = - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + (V_1 + V_2) \frac{h}{2} \quad (\text{A.9})$$

Considere-se agora a equação da continuidade para um fluido com densidade constante,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Integrando a equação (A.10) na direção z, obtém-se,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h u dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^h v dz \right) + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (\text{A.11})$$

que, de acordo com as equações (A.8) e (A.9), pode ser escrita como,

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + w_h - w_0 = 0 \quad (\text{A.12})$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + (U_1 + U_2) \frac{h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + (V_1 + V_2) \frac{h}{2} \right] + w_h - w_0 = 0 \quad (\text{A.13})$$

que, rearranjada fornece a equação de Reynolds na sua forma completa,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(U_1 + U_2) \frac{h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(V_1 + V_2) \frac{h}{2} \right] + (w_h - w_0) \quad (\text{A.14})$$

Note-se que na equação anterior as velocidades, na direção de z das superfícies 1 e 2, foram expressas por w_h e w_0 , respectivamente.

APÊNDICE B

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ESPESSURA DO FILME DE ÓLEO

Em um mancal radial, a espessura do filme de óleo h é função do ângulo θ . Para sua determinação considera-se a figura B1, abaixo.

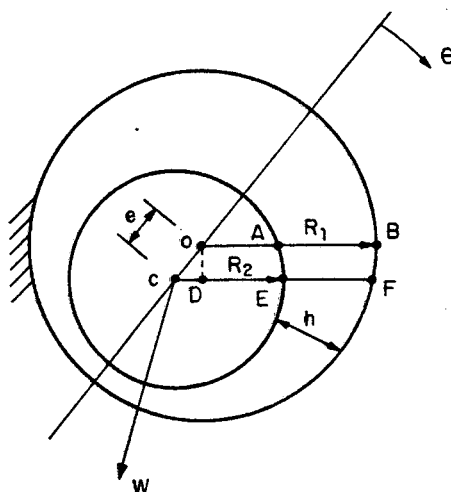


Figura B1 - Geometria da espessura do filme de óleo.

Sabendo que a folga radial c é da ordem de micrometros, tem-se que,

$$\overline{AB} \ll \overline{OA} \quad (B.1)$$

e

$$\overline{EF} \ll \overline{CE} \quad (B.2)$$

Adicionalmente,

$$\overline{OB} \cong \overline{CF} \quad (B.3)$$

Pode-se então considerar que,

$$h(\theta) = \overline{AB} \approx \overline{EF} \quad (\text{B. 4a})$$

e assim,

$$h = \overline{EF} = \overline{OB} - \overline{DE} = \overline{OB} - (\overline{CE} - \overline{CD}) \quad (\text{B. 4b})$$

ou,

$$h = \overline{OB} - \overline{CE} + \overline{CD} = \overline{OB} - \overline{CE} + e \cos \theta \quad (\text{B. 4c})$$

Mas,

$$\overline{OB} = R_1 \quad (\text{B. 5})$$

$$\overline{CE} = R_2 \quad (\text{B. 6})$$

Substituindo as equações (B.5) e (B.6) na equação (B.4c), tem-se,

$$h = R_1 - R_2 + e \cos \theta \quad (\text{B. 7})$$

onde,

$$R_1 - R_2 = c \quad ; \quad c \longrightarrow \text{folga radial} \quad (\text{B. 8})$$

Desta forma,

$$h = c + e \cos \theta \quad (\text{B. 9})$$

Utilizando a relação de excentricidade $\epsilon = e/c$, a equação (B.9) pode ser escrita como:

$$h = c(1 + \epsilon \cos \theta) \quad (\text{B. 10})$$

que é a equação da espessura do filme de óleo em função do ângulo θ para um mancal radial alinhado com o eixo.

APÊNDICE C

DETERMINAÇÃO DAS VELOCIDADES DO EIXO EM RELAÇÃO AO MANCAL NO CARREGAMENTO DINÂMICO

Considere-se a figura C1 que descreve o movimento do eixo em relação ao mancal,

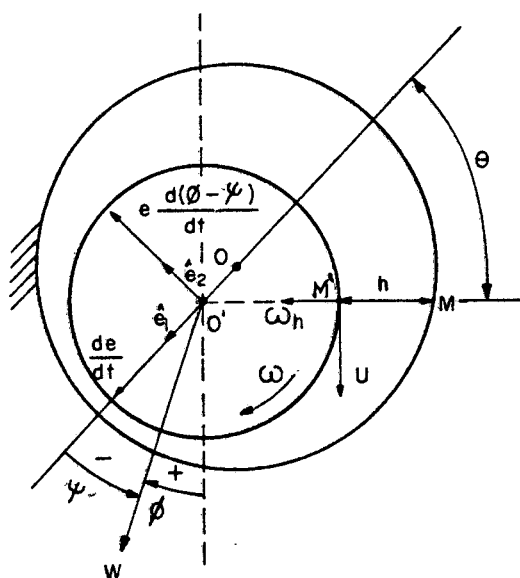


Figura C1 - Identificação das variáveis do mancal.

Para o mancal fixo, tem-se:

$\frac{de}{dt}$ → velocidade radial de O' em relação a O ;

$e \frac{d}{dt}(\phi - \psi)$ → velocidade circunferencial de O' em relação a O .

As velocidades U e w_h são, respectivamente, as velocidades circunferencial e radial de M' em relação a M , sendo que estas velocidades

podem ser decompostas em velocidade de M' em relação a O' e velocidade de O' em relação a O, ou seja,

$$\vec{V}_{M',M} = \vec{V}_{M',O'} + \vec{V}_{O',O} \quad (C.1)$$

Assim, considerando a figura C2, obtém-se:

$$U = \omega R + \frac{de}{dt} \cos \theta - e \frac{d}{dt}(\phi - \psi) \sin \theta \quad (C.2)$$

$$w_h = \frac{de}{dt} \sin \theta + e \frac{d}{dt}(\phi - \psi) \cos \theta \quad (C.3)$$

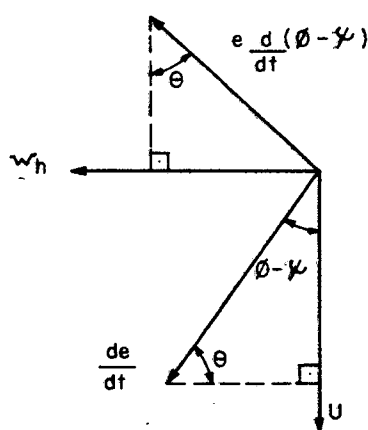


Figura C2 - Decomposição das velocidades relativas.

Considerando que na equação (C.2) o segundo e o terceiro termos em geral são muito menores do que o primeiro e podem ser desprezados, e ainda que,

$$e = c \epsilon \quad (C.4)$$

tem-se,

$$U = \omega R \quad (C.5)$$

$$w_h = c \frac{d\epsilon}{dt} \cos \theta + c \epsilon \frac{d}{dt}(\phi - \psi) \sin \theta \quad (C.6)$$

que são as velocidades circunferencial e radial, respectivamente, do eixo em relação ao mancal em função do ângulo θ .

APÊNDICE D

ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA CARREGAMENTO DINÂMICO - FORMULAÇÃO LAMINAR

Partindo da equação de Reynolds para mancais radiais finitos submetidos a um carregamento dinâmico (eq. (19) item 2.1),

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \frac{1}{2c^2} \left[2\dot{\epsilon} \cos \theta - \epsilon \sin \theta (\omega - 2\omega_L + 2\dot{\psi}) \right] \quad (D.1)$$

e utilizando as seguintes variáveis adimensionais,

$$P = \frac{pc^2}{6\mu UR} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \quad (D.2a)$$

$$y^* = y/R \quad (D.2b)$$

$$\tau = \omega t \quad (D.2c)$$

$$\omega_L^* = \omega_L / \omega \quad (D.2d)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{6\mu UR}{c^2} (1+\epsilon \cos \theta)^{-3/2} P \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y^*} \left\{ \frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\frac{6\mu UR}{c^2} (1+\epsilon \cos \theta)^{-3/2} P \right] \right\} = \\ & = \frac{1}{2c^2} \left\{ 2\omega \frac{d\epsilon}{d\tau} \cos \theta - \epsilon \sin \theta \left[\omega - 2\omega_L^* + 2\omega \frac{d\psi}{d\tau} \right] \right\} \quad (D.3) \end{aligned}$$

Rearranjando os termos na equação anterior tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{U}{Rc^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ (1+\epsilon \cos \theta)^3 \left[-\frac{3}{2} (1+\epsilon \cos \theta)^{-5/2} (-\epsilon \sin \theta) P + (1+\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{U}{Rc^2} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = \frac{1}{2} \frac{U}{Rc^2} \left\{ 2\ddot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\epsilon \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \right\} \end{aligned} \quad (D.4)$$

Após a simplificação dos termos que se anulam, a equação (D.4) se torna,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{3}{2} \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} P + (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\} + \\ & + (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = 2\ddot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\epsilon \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \end{aligned} \quad (D.5)$$

Desenvolvendo o termo entre chaves tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{3}{4} \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{-1/2} (-\epsilon \sin \theta) P + \\ & + \frac{3}{2} \epsilon \cos \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} P + (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} - \frac{3}{2} \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\ & + (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = 2\ddot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\epsilon \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \end{aligned} \quad (D.6)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = \\ & = \frac{3}{2} \epsilon (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} \left[\frac{1}{2} \frac{\epsilon \sin^2 \theta}{(1+\epsilon \cos \theta)} - \cos \theta \right] P + \\ & + 2 \ddot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\epsilon \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \end{aligned} \quad (D.7)$$

de onde obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = \frac{3}{4} \frac{\epsilon P}{(1+\epsilon \cos \theta)} \left[\frac{\epsilon \sin^2 \theta - 2 \cos \theta (1+\epsilon \cos \theta)}{(1+\epsilon \cos \theta)} \right] + \\ + \frac{2 \dot{\epsilon} \cos \theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^{3/2}} - \frac{2 \epsilon \dot{\psi} \sin \theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^{3/2}} - \frac{\epsilon \sin \theta (2 \omega_L^* - 1)}{(1+\epsilon \cos \theta)^{3/2}} \end{aligned} \quad (D.8)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = \frac{3}{4} \frac{P}{(1+\epsilon \cos \theta)^2} \left[\epsilon^2 (\cos^2 \theta - \cos 2\theta) - \right. \\ \left. - 2 \epsilon \cos \theta - 2 \epsilon^2 \cos^2 \theta \right] + A(\theta) \dot{\epsilon}^* + B(\theta) \dot{\psi}^* + D(\theta) \end{aligned} \quad (D.9)$$

Rearranjando a equação (D.9), obtém-se

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = -\frac{3}{4} \left[\frac{\epsilon^2 \cos^2 \theta - \epsilon^2 \cos 2\theta + 2 \epsilon \cos \theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^2} \right] P + A(\theta) \dot{\epsilon}^* + B(\theta) \dot{\psi}^* + D(\theta) \quad (D.10)$$

ou;

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^{*2}} = A(\theta) \dot{\epsilon}^* + B(\theta) \dot{\psi}^* + C(\theta) P + D(\theta) \quad (D.11)$$

onde,

$$A(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^{3/2}} \quad (D.12a)$$

$$B(\theta) = \frac{-2 \epsilon \sin \theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^{3/2}} \quad (D.12b)$$

$$C(\theta) = -\frac{3}{4} \left[\frac{2 \epsilon \cos \theta + \epsilon^2 \cos \theta + \epsilon^2 \cos 2\theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^2} \right] \quad (D.12c)$$

$$D(\theta) = \frac{\epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1)}{(1 + \epsilon \cos \theta)^{3/2}} \quad (\text{D. 12d})$$

e,

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (\text{D. 12e})$$

$$\dot{\psi}^* = \frac{d\psi}{d\tau} \quad (\text{D. 12f})$$

A utilização da equação (D.11) torna a solução numérica para uma mesma malha computacional mais precisa do que quando a equação (D.1) é utilizada. Isto se verifica pelo fato dos gradientes de P com θ não serem tão acentuados como aqueles associados a p.

APÊNDICE E

EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA CARREGAMENTO DINÂMICO -
FORMULAÇÃO TURBULENTA

A equação de Reynolds para mancais radiais finitos submetidos a um carregamento dinâmico - formulação laminar (eq. (19), item 2.1) é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \\ = \frac{1}{2c^2} \left[2\dot{\epsilon} \cos \theta - \epsilon \sin \theta (\omega - 2\omega_L + 2\dot{\psi}) \right] \end{aligned} \quad (E.1)$$

Observa-se que, de acordo com [16], para o regime turbulento a equação de Reynolds é alterada apenas pela introdução dos coeficientes turbulentos, G_θ e G_y ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[G_\theta \frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[G_y \frac{(1+\epsilon \cos \theta)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \\ = \frac{1}{2c^2} \left[2\dot{\epsilon} \cos \theta - \epsilon \sin \theta (\omega - 2\omega_L + 2\dot{\psi}) \right] \end{aligned} \quad (E.2)$$

Introduzindo os seguintes termos adimensionais,

$$P = \frac{pc^2}{6\mu UR} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \quad (E.3a)$$

$$\omega_L^* = \omega_L / \omega \quad (E.3b)$$

$$\ddot{\epsilon}^* = d\epsilon/d\tau \quad (\text{E. 3c})$$

$$\ddot{\psi}^* = d\psi/d\tau \quad (\text{E. 3d})$$

$$\tau = \omega t \quad (\text{E. 3e})$$

bem como a transformação $(\theta, y) \longrightarrow (\eta, \xi)$,

$$\eta = \frac{\theta}{(\pi + \alpha)} \quad (\text{E. 4a})$$

$$\xi = \frac{y}{R} \quad (\text{E. 4b})$$

a equação (E.2) torna-se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2(\pi + \alpha)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_{\eta} \frac{\{1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta]\}^3}{12\mu} \frac{6\mu UR}{c^2} \frac{1}{(\pi + \alpha)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\{1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta]\}^{-3/2} P \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ G_{\xi} \frac{\{1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta]\}^3}{12\mu} \frac{6\mu UR}{c^2} \frac{\{1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta]\}^{-3/2}}{R} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\} = \\ & = \frac{1}{2c^2} \left[2\omega \frac{d\epsilon}{d\tau} \cos\theta - \epsilon \sin\theta \left(\omega - 2\omega_L^* + 2\omega \frac{d\psi}{d\tau} \right) \right] \quad (\text{E. 5}) \end{aligned}$$

Rearranjando os termos na equação (E.5) tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{U}{2c^2 R} \frac{1}{(\pi + \alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_{\eta} \{1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta]\}^3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\{1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta]\}^{-3/2} P \right] \right\} + \\ & + \frac{U}{2c^2 R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ G_{\xi} \{1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta]\}^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\} = \\ & = \frac{U}{2c^2 R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[2\dot{\epsilon}^* \cos\theta - 2\dot{\psi}^* \sin\theta + \epsilon \sin\theta (2\omega_L^* - 1) \right] \quad (\text{E. 6}) \end{aligned}$$

Simplificando os termos semelhantes, obtém-se,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\pi+\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_{\eta} (1+\epsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1+\epsilon \cos \theta)^{-3/2} P \right] \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ G_{\xi} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\} = 2\dot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1)
\end{aligned} \quad (E.7)$$

onde,

$$G_{\eta} = \frac{1}{a_{\eta} + b_{\eta} \epsilon \cos \theta} \quad (E.8a)$$

$$G_{\xi} = \frac{1}{a_{\xi} + b_{\xi} \epsilon \cos \theta} \quad (E.8b)$$

$$\theta = (\pi + \alpha) \eta \quad (E.8c)$$

e,

$$a_{\eta} = 1 + 0,00069 \text{Re}^{0,95} \quad (E.8d)$$

$$b_{\eta} = 0,00066 \text{Re}^{0,95} \quad (E.8e)$$

$$a_{\xi} = 1 + 0,00069 \text{Re}^{0,88} \quad (E.8f)$$

$$b_{\xi} = 0,00061 \text{Re}^{0,88} \quad (E.8g)$$

onde.

$$\text{Re} = \frac{\rho U c}{\mu} \quad (E.8h)$$

APÊNDICE F

DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA TRAJETÓRIA - CONSIDERANDO A MASSA DO EIXO

As equações para determinação da trajetória do eixo são obtidas através de um balanço das forças atuantes no eixo, como pode ser visto na figura F1,

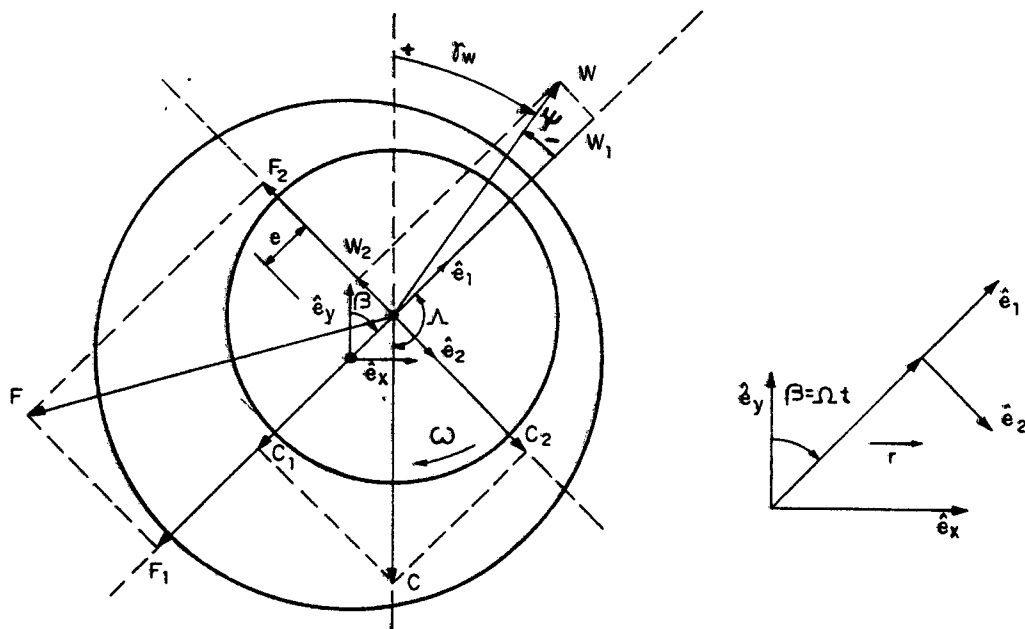


Figura F1 - Balanço de forças considerando a massa do eixo.

onde,

$\vec{F} \rightarrow$ força hidrodinâmica;

$\vec{W} \rightarrow$ carga;

$\vec{C} \rightarrow$ peso do eixo;

$\beta \rightarrow \gamma_w - \psi$;

$\vec{r} \rightarrow$ vetor posição do centro do eixo.

Para determinar a força hidrodinâmica a cada instante t , partindo-se das equações (38) e (48), é necessário que se conheça a posição e acelerações do eixo no sistema de coordenadas (1,2), ou seja, ϵ , ψ , $\dot{\epsilon}$ e $\dot{\psi}$.

Os dois sistemas de coordenadas (x,y) e (1,2), estão relacionados da seguinte forma,

$$\hat{e}_1 = \sin(\Omega t) \hat{e}_x + \cos(\Omega t) \hat{e}_y \quad (F.1)$$

$$\hat{e}_2 = \cos(\Omega t) \hat{e}_x - \sin(\Omega t) \hat{e}_y \quad (F.2)$$

sendo que,

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \Omega \cos(\Omega t) \hat{e}_x - \Omega \sin(\Omega t) \hat{e}_y \quad (F.3)$$

ou,

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \Omega \hat{e}_2 \quad (F.4)$$

e,

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\Omega \sin(\Omega t) \hat{e}_x - \Omega \cos(\Omega t) \hat{e}_y \quad (F.5)$$

ou,

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\Omega \hat{e}_1 \quad (F.6)$$

O movimento do eixo em relação ao sistema de coordenadas (1,2) pode ser obtido a partir de derivações sucessivas da posição do eixo (\vec{r}), onde,

$$\vec{r} = r(t) \hat{e}_1 \quad (F.7)$$

ou,

$$\vec{r} = e[\sin(\Omega t) \hat{e}_x + \cos(\Omega t) \hat{e}_y] \quad (F.8)$$

De (F.8), a velocidade do eixo é dada por,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_1) \quad (\text{F.9})$$

$$\vec{v} = \hat{e}_1 \frac{dr}{dt} + r \frac{d\hat{e}_1}{dt} \quad (\text{F.10})$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_1 + r\Omega\hat{e}_2 \quad (\text{F.11})$$

e a aceleração será,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt} \hat{e}_1\right) + \frac{d}{dt}(r\Omega\hat{e}_2) \quad (\text{F.12})$$

$$\vec{a} = \hat{e}_1 \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{e}_1}{dt} + r\Omega \frac{d\hat{e}_2}{dt} + r\hat{e}_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega\hat{e}_2 \frac{dr}{dt} \quad (\text{F.13})$$

ou,

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \hat{e}_1 + 2\Omega \frac{dr}{dt} \hat{e}_2 - r\Omega^2\hat{e}_1 + r\frac{d\Omega}{dt} \hat{e}_2 \quad (\text{F.14})$$

Os termos do lado direito da equação anterior são, respectivamente, as acelerações radial, de Coriolis, centrípeta e angular presentes em um movimento rotativo.

Sabe-se, no entanto, que,

$$\Omega = \frac{d\beta}{dt} \quad (\text{F.15})$$

e como $|\vec{r}| = e$, tem-se que,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{de}{dt} \quad (\text{F.16})$$

Assim, obtém-se,

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 e}{dt^2} - e \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right] \hat{e}_1 + \left[e \frac{d^2 \beta}{dt^2} + 2 \frac{de}{dt} \frac{d\beta}{dt} \right] \hat{e}_2 \quad (\text{F. 17})$$

Conhecida a aceleração, pela 2ª lei de Newton tem-se que,

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a} \quad (\text{F. 18})$$

e portanto, para cada direção tem-se,

- direção \hat{e}_1 ,

$$W \cos \psi + F_1 + C \cos \Lambda = \frac{C}{g} \left[\frac{d^2 e}{dt^2} - e \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right] \quad (\text{F. 19})$$

- direção \hat{e}_2 ,

$$W \sin \psi + F_2 + C \sin \Lambda = \frac{C}{g} \left[e \frac{d^2 \beta}{dt^2} + 2 \frac{de}{dt} \frac{d\beta}{dt} \right] \quad (\text{F. 20})$$

Por simplicidade, introduz-se os seguintes termos adimensionais,

$$W^* = \frac{c^2}{\mu U R^2 L} W \quad (\text{F. 21a})$$

$$F^* = \frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) \frac{c^2}{\mu U R^2 L} F \quad (\text{F. 21b})$$

$$C^* = \frac{c^2}{\mu U R^2 L} C \quad (\text{F. 21c})$$

$$G = \frac{U^2 c}{R^2 g} \quad (\text{F. 21d})$$

$$\tau = \omega t \quad (\text{F. 21e})$$

$$\epsilon = e/c$$

(F.21f)

A utilização das variáveis adimensionais fornece,

direção \hat{e}_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{\mu UR^2 L}{c^2} W^* \cos \psi + 6 \left(\frac{R}{L} \right) \frac{\mu UR^2 L}{c^2} F_1^* + \frac{\mu UR^2 L}{c^2} C^* \cos \Lambda = \\ & = \frac{\mu UR^2 L}{c^2} C^* \frac{R^2}{U^2 c} G \left[c \omega^2 \frac{d^2 \epsilon}{d\tau^2} - c \epsilon \omega^2 \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (F.22)$$

Simplificando os termos semelhantes,

$$W^* \cos \psi + 6 \left(\frac{R}{L} \right) F_1^* + C^* \cos \Lambda = C^* G \left[\epsilon^{**} - \epsilon \dot{\beta}^{*2} \right] \quad (F.23)$$

ou,

$$\frac{W^*}{C^* G} \cos \psi + \frac{6}{C^* G (L/R)} F_1^* + \frac{1}{G} \cos \Lambda = \epsilon^{**} - \epsilon \dot{\beta}^{*2} \quad (F.24)$$

direção \hat{e}_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\mu UR^2 L}{c^2} W^* \sin \psi + 6 \left(\frac{R}{L} \right) \frac{\mu UR^2 L}{c^2} F_2^* + \frac{\mu UR^2 L}{c^2} C^* \sin \Lambda = \\ & = \frac{\mu UR^2 L}{c^2} C^* \frac{R^2}{U^2 c} G \left[c \epsilon \omega^2 \frac{d^2 \beta}{d\tau^2} + 2 c \omega^2 \frac{d\epsilon}{d\tau} \frac{d\beta}{d\tau} \right] \end{aligned} \quad (F.25)$$

Simplificando os termos semelhantes,

$$W^* \sin \psi + 6 \left(\frac{R}{L} \right) F_2^* + C^* \sin \Lambda = C^* G \left[\epsilon \ddot{\beta}^{**} + 2 \dot{\epsilon} \dot{\beta}^{**} \right] \quad (F.26)$$

ou,

$$\frac{W^*}{C^*G} \sin\psi + \frac{6}{C^*G(L/R)} F_2^* + \frac{1}{G} \sin\Lambda = \epsilon\ddot{\beta}^* + 2\dot{\epsilon}\dot{\beta}^* \quad (F.27)$$

Definindo para as equações (F.24) e (F.28) os termos:

$$A = \frac{1}{G} \quad (F.28a)$$

$$B = \frac{6}{C^*G(L/R)} \quad (F.28b)$$

chega-se a,

$$\ddot{\epsilon}^* - \dot{\epsilon}\dot{\beta}^{*2} = A \left(\frac{W^*}{C^*} \cos\psi + \cos\Lambda \right) + BF_1^* \quad (F.29)$$

$$\epsilon\ddot{\beta}^* + 2\dot{\epsilon}\dot{\beta}^* = A \left(\frac{W^*}{C^*} \sin\psi + \sin\Lambda \right) + BF_1^* \quad (F.30)$$

As equações (F.29) e (F.30) caracterizam o sistema de equações diferenciais a ser resolvido para a determinação da posição, velocidades e acelerações do eixo a cada instante de tempo $\Delta\tau$.

Nas equações (F.29) e (F.30), utilizou-se,

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (F.31a)$$

$$\ddot{\epsilon}^* = \frac{d^2\epsilon}{d\tau^2} \quad (F.31b)$$

e,

$$\dot{\beta}^* = \frac{d\beta}{d\tau} \quad (F.31c)$$

$$\ddot{\beta}^* = \frac{d^2\beta}{d\tau^2} \quad (F.31d)$$

APÊNDICE G

DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA CARREGAMENTO
DINÂMICO - FORMULAÇÃO TURBULENTA

A equação de Reynolds para mancais radiais finitos submetidos a um carregamento dinâmico em formulação turbulenta (eq. (48) item 2.2) é,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\pi+\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_{\eta} (1+\epsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1+\epsilon \cos \theta)^{-3/2} P \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ G_{\xi} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\} = 2\dot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \end{aligned} \quad (G.1)$$

onde,

$$\theta = (\pi + \alpha)\eta \quad (G.2)$$

Derivando o termo $[(1+\epsilon \cos \theta)^{-3/2} P]$ em relação a η tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\pi+\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_{\eta} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{3}{2} G_{\eta} (\pi+\alpha) \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} P \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ G_{\xi} (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\} = 2\dot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \end{aligned} \quad (G.3)$$

Utilizando o método dos volumes finitos, no qual um volume de controle típico possui as características apresentadas na figura G1,

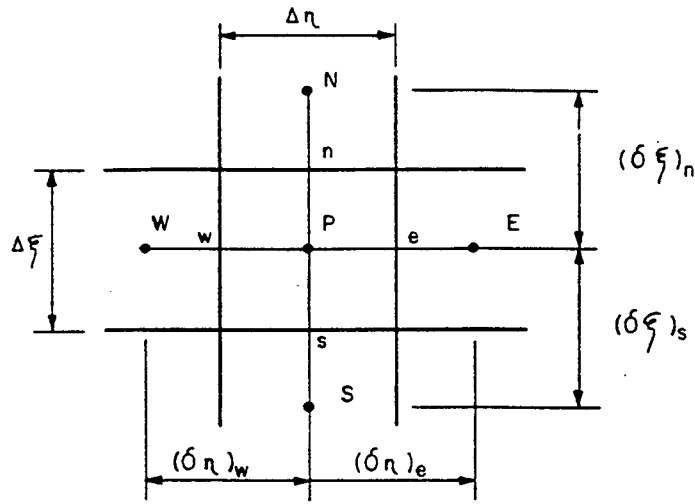


Figura G1 - Volume de controle típico usado na discretização do domínio de solução.

e integrando a equação (G.3) ao longo de θ , na forma,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\pi+\alpha)^2} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_\eta (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right\} d\eta + \int_w^e \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ G_\xi (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\} d\eta = \\ & \int_w^e \left[2\ddot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\dot{\epsilon}^* \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \right] d\eta - \\ & - \frac{3}{2} \frac{1}{(\pi+\alpha)} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ G_\eta \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} P \right\} d\eta \end{aligned} \quad (G.4)$$

obtem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\pi+\alpha)^2} \left\{ \left[G_\eta (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] \Big|_e - \left[G_\eta (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \Big|_w \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[G_\xi (1+\epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] \Delta \eta = \left[2\ddot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\dot{\epsilon}^* \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1) \right] \Delta \eta - \\ & - \frac{3}{2} \frac{1}{(\pi+\alpha)} \left\{ \left[G_\eta \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} P \right] \Big|_e - \left[G_\eta \epsilon \sin \theta (1+\epsilon \cos \theta)^{1/2} P \right] \Big|_w \right\}, \end{aligned} \quad (G.5)$$

Utilizando diferenças centrais, pode-se aproximar as derivadas primeiras por,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e = \frac{P_E - P_P}{(\delta \eta)_e} \quad (G. 6a)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_w = \frac{P_P - P_W}{(\delta \eta)_w} \quad (G. 6b)$$

e as pressões nas faces por,

$$P_e = \frac{P_P + P_E}{2} \quad (G. 7a)$$

$$P_w = \frac{P_P + P_W}{2} \quad (G. 7b)$$

Integrando, agora, a equação (G.5) ao longo de ξ chega-se a,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\pi + \alpha)^2} \left\{ \left[G_\eta \Big|_e (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{3/2} \frac{(P_E - P_P)}{(\delta \eta)_e} \right] - \left[G_\eta \Big|_w (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_w)^{3/2} \frac{(P_P - P_W)}{(\delta \eta)_w} \right] \right\} \Delta \xi + \\ & + \left\{ G_\xi \Big|_P (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_P)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_n - G_\xi \Big|_P (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_P)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_s \right\} \Delta \eta = \left[2 \epsilon^* \cos \theta - \right. \\ & \left. 2 \epsilon \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2 \omega_L^* - 1) \right] \Big|_P \Delta \eta \Delta \xi - \frac{3}{2} \frac{1}{(\pi + \alpha)} \left[G_\eta \Big|_e \epsilon \sin \theta \Big|_e (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{1/2} \frac{(P_P + P_E)}{2} - \right. \\ & \left. G_\eta \Big|_w \epsilon \sin \theta \Big|_w (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_w)^{1/2} \frac{(P_P + P_W)}{2} \right] \Delta \xi \quad (G. 8) \end{aligned}$$

onde se pode, novamente, aproximar as derivadas primeiras por,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_n = \frac{P_N - P_P}{(\delta \xi)_n} \quad (G. 9a)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_s = \frac{P_P - P_S}{(\delta \xi)_s} \quad (G. 9b)$$

Então,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)^2} G_{\eta} \Big|_e \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{3/2}}{(\delta \eta)_e} + \frac{3}{4} \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)} G_{\eta} \Big|_e \epsilon \sin \theta \Big|_e (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{1/2} \right] P_E + \\
& + \left[\frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)^2} G_{\eta} \Big|_w \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_w)^{3/2}}{(\delta \eta)_w} - \frac{3}{4} \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)} G_{\eta} \Big|_w \epsilon \sin \theta \Big|_w (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_w)^{1/2} \right] P_W + \\
& + \left[G_{\xi} \Big|_P \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_P)^{3/2}}{(\delta \eta)_n} \Delta \eta \right] P_N + \left[G_{\xi} \Big|_P \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_P)^{3/2}}{(\delta \xi)_s} \Delta \eta \right] P_S - \\
& - \left[2 \dot{\epsilon}^* \cos \theta - 2 \epsilon \dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2 \omega_L^* - 1) \right] \Big|_P \Delta \eta \Delta \xi = \\
& = \left[\frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)^2} G_{\eta} \Big|_e \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{3/2}}{(\delta \eta)_e} - \frac{3}{4} \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)} G_{\eta} \Big|_e \epsilon \sin \theta \Big|_e (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{1/2} + \right. \\
& + \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)^2} G_{\eta} \Big|_w \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_w)^{3/2}}{(\delta \eta)_w} + \frac{3}{4} \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)} G_{\eta} \Big|_w \epsilon \sin \theta \Big|_w (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_w)^{1/2} + \\
& \left. + G_{\xi} \Big|_P \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_P)^{3/2}}{(\delta \xi)_n} \Delta \eta + G_{\xi} \Big|_P \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_P)^{3/2}}{(\delta \xi)_s} \Delta \eta \right] P_P \quad (G.10)
\end{aligned}$$

A equação anterior pode ser escrita em forma compactada como,

$$a_{P_P} = a_{e_E} + a_{w_W} + a_{n_N} + a_{s_S} + S \quad (G.11)$$

onde,

$$a_e = a_{e1} + a_{e2} \quad (G.12a)$$

$$a_{e1} = \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)^2} G_{\eta} \Big|_e \frac{(1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{3/2}}{(\delta \eta)_e} \quad (G.12b)$$

$$a_{e2} = \frac{3}{4} \frac{\Delta \xi}{(\pi + \alpha)} G_{\eta} \Big|_e \epsilon \sin \theta \Big|_e (1 + \epsilon \cos \theta \Big|_e)^{1/2} \quad (G.12c)$$

$$a_w = a_{w1} + a_{w2} \quad (G.12d)$$

$$a_{w1} = \frac{\Delta\xi}{(\pi+\alpha)^2} G_\eta \Big|_w \frac{(1+\epsilon \cos\theta|_w)^{3/2}}{(\delta\eta)_w} \quad (G.12e)$$

$$a_{w2} = \frac{3}{4} \frac{\Delta\xi}{(\pi+\alpha)} \epsilon \sin\theta \Big|_w (1+\epsilon \cos\theta|_w)^{1/2} \quad (G.12f)$$

$$a_n = G_\xi \Big|_p \frac{(1+\epsilon \cos\theta|_p)^{3/2}}{(\delta\xi)_n} \Delta\eta \quad (G.12g)$$

$$a_s = G_\xi \Big|_p \frac{(1+\epsilon \cos\theta|_p)^{3/2}}{(\delta\xi)_s} \Delta\eta \quad (G.12h)$$

$$a_p = a_{e1} - a_{e2} + a_{w1} + a_{w2} + a_n + a_s \quad (G.12i)$$

$$S = - \left[2\dot{\epsilon}^* \cos\theta - 2\dot{\psi}^* \sin\theta + \epsilon \sin\theta (2\omega_L^* - 1) \right] \Big|_p \Delta\eta \Delta\xi \quad (G.12j)$$

APENDICE H

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DA FRONTEIRA DE CAVITAÇÃO EM MANCAIS
SUBMETIDOS A CARREGAMENTO DINÂMICO - FORMULAÇÃO TURBULENTA

A figura H1 ilustra volume de controle típico adjacente à fronteira de cavitação. Um balanço de massa neste volume de controle fornece,

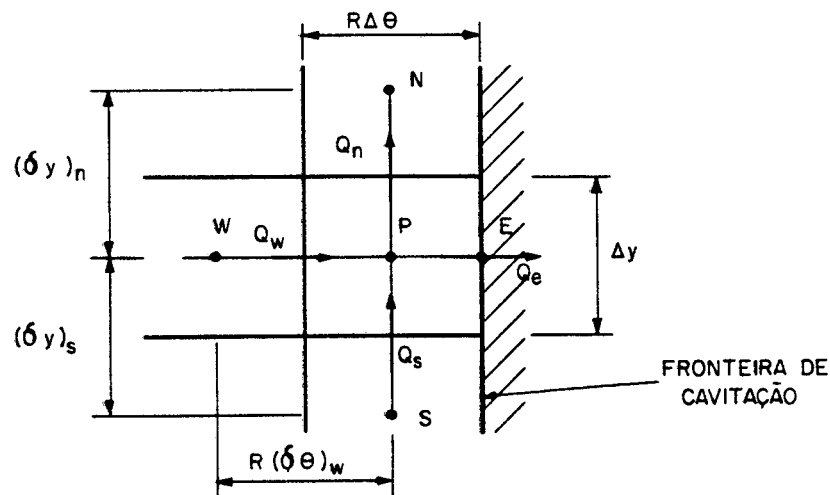


Figura H1 - Volume de controle típico adjacente à fronteira de cavitação.

$$Q_w + Q_s = Q_n + Q_e + \dot{V}_p \quad (\text{H.1})$$

ou,

$$q_\theta \Big|_w \Delta y + q_y \Big|_s R \Delta \theta = q_y \Big|_n R \Delta \theta + q_\theta \Big|_e \Delta y + \frac{\partial}{\partial t} (h R \Delta \theta \Delta y) \Big|_p \quad (\text{H.2})$$

onde q_θ e q_y são vazões por unidade de largura conforme apresentado no Apêndice

A, e o termo $\partial(hR\Delta\theta\Delta y)/\partial t$ refere-se à variação de massa no volume de controle associada aos movimentos do eixo e da fronteira de cavitação.

A inclusão dos termos turbulentos fornece,

$$q_{\theta} = -G_{\theta} \frac{h^3}{12\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{Uh}{2} \quad (\text{H. 3a})$$

$$q_y = -G_y \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{H. 3b})$$

em que, o uso do termo adimensional para a pressão dada por,

$$P = \frac{c^2}{6U\mu R} p(1+\epsilon \cos\theta)^{3/2} \quad (\text{H. 4})$$

e da transformação $(\theta, y) \rightarrow (\eta, \xi)$ dada por,

$$\eta = \frac{\theta}{(\pi+\alpha)} \quad (\text{H. 5a})$$

$$\xi = \frac{y}{R} \quad (\text{H. 5b})$$

fornece,

$$q_{\eta} = -G_{\eta} \frac{cU}{2} \frac{(1+\epsilon \cos\theta)^3}{(\pi+\alpha)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1+\epsilon \cos\theta)^{-3/2} P \right] + \frac{Uc}{2} (1+\epsilon \cos\theta) \quad (\text{H. 6})$$

Derivando o termo entre colchetes em relação a η , e lembrando que $\theta=(\pi+\alpha)\eta$, obtém-se,

$$q_{\eta} = -\frac{cU}{2} \left[G_{\eta} \frac{(1+\epsilon \cos\theta)^{3/2}}{(\pi+\alpha)} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{3}{2} G_{\eta} \epsilon \sin\theta (1+\epsilon \cos\theta)^{1/2} P - (1+\epsilon \cos\theta) \right] \quad (\text{H. 7})$$

Definindo a vazão adimensional como,

$$q^* = \frac{2q}{cU} \quad (\text{H. 8})$$

e A e B como

$$A = 1 + \epsilon \cos \theta$$

$$B = \epsilon \sin \theta$$

obtém-se, da equação (H.7),

$$q_{\eta}^* = A - G_{\eta} A^{1/2} \left[\frac{A}{(\pi + \alpha)} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{3}{2} B P \right] \quad (H.10)$$

De modo semelhante, obtém-se,

$$q_{\xi} = -G_{\xi} \frac{cU}{2} (1 + \epsilon \cos \theta)^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (H.11)$$

ou, na forma de vazão adimensional,

$$q_{\xi}^* = -G_{\xi} A^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (H.12)$$

As equações (H.10) e (H.12) aplicadas às faces do volume de controle em questão fornecem,

$$q_{\eta}^* \Big|_w = q_1^* = A_w - G_{\eta} \Big|_w A_w^{1/2} \left[\frac{A_w}{(\pi + \alpha)} \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_w + \frac{3}{2} B_w P \Big|_w \right] \quad (H.13)$$

$$q_{\xi}^* \Big|_s = q_2^* = -G_{\xi} \Big|_s A_s^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_s \quad (H.14)$$

$$q_{\xi}^* \Big|_n = q_3^* = -G_{\xi} \Big|_n A_n^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_n \quad (H.15)$$

$$q_{\eta}^* \Big|_E = q_4^* = A_e - G_{\eta} \Big|_e A_e^{1/2} \left[\frac{A_e}{(\pi + \alpha)} \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_e + \frac{3}{2} B_e P \Big|_e \right] \quad (H.16)$$

A equação anterior, quando aplicada à fronteira leste do volume de

controle, e incorporada a condição de contorno (40d) referente à fronteira de cavitação, fornece,

$$q_{\eta}^* \Big|_E = q_4^* = A_e = 1 + \epsilon \cos[(\pi + \alpha)\eta] \Big|_e \quad (\text{H. 17})$$

onde, para o volume em consideração, $\eta|_e = 1$, e, portanto,

$$q_4^* = 1 + \epsilon \cos(\pi + \alpha) \quad (\text{H. 18})$$

que, por considerações trigonométricas, equivale a,

$$q_4^* = 1 - \epsilon \cos \alpha \quad (\text{H. 19})$$

Com relação ao termo que considera a variação do volume de controle na equação (H.2), ou seja,

$$\dot{V} = \frac{\partial}{\partial t} (hR\Delta\theta\Delta y) \quad (\text{H. 20})$$

observa-se que, ao estar submetido a um carregamento dinâmico, tanto a altura h quanto o comprimento $\Delta\theta$ do volume variam continuamente com o tempo. A variação da altura está associada à presença de filme espremido, enquanto a variação do comprimento está associado ao movimento da fronteira de cavitação. Assim,

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial h}{\partial t} R\Delta\theta + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} hR \right) \Delta y \quad (\text{H. 21})$$

Definindo-se as seguintes vazões por unidade de comprimento,

$$q_5 = R\Delta\theta \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{H. 22})$$

$$q_6 = hR \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} \quad (\text{H. 23})$$

tem-se,

$$\dot{V} = (q_5 + q_6) \Delta y \quad (H.24)$$

Entretanto, sabe-se que,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = w_h \quad (H.25)$$

e, de acordo com o Apêndice C,

$$w_h = c \frac{d\epsilon}{dt} \cos \theta + c\epsilon \frac{d}{dt}(\phi - \psi) \sin \theta \quad (H.26)$$

Portanto,

$$q_5 = R \Delta \theta \left(c \frac{d\epsilon}{dt} \cos \theta + c\epsilon \frac{d}{dt}(\phi - \psi) \sin \theta \right) \quad (H.27)$$

Utilizando-se agora a transformação de coordenadas (H.5) juntamente com os seguintes termos adimensionais,

$$\tau = \omega t \quad (H.28a)$$

$$\omega_L^* = \frac{d\phi}{d\tau} \quad (H.28b)$$

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (H.28c)$$

$$\dot{\psi}^* = \frac{d\psi}{d\tau} \quad (H.28d)$$

obtem-se, para a equação (H.27),

$$q_5 = R(\pi + \alpha) \Delta \eta c \omega [\dot{\epsilon}^* \cos \theta + \epsilon \sin \theta (\omega_L^* - \dot{\psi}^*)] \quad (H.29)$$

ou, na forma adimensional, segundo a definição (H.8),

$$q_5^* = 2(\pi + \alpha) \Delta \eta [\dot{\epsilon}^* \cos \theta + \epsilon \sin \theta (\omega_L^* - \dot{\psi}^*)] \quad (H.30)$$

Utilizando-se os termos adimensionais (H.8) e (H.28a) na equação (H.23), obtém-se,

$$q_6^* = 2(1+\epsilon \cos \theta) \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \tau} \quad (\text{H. 31})$$

a qual, aplicando-se a transformação de coordenadas (H.5), se torna,

$$q_6^* = 2A_p \Delta \eta \dot{\alpha}^* \quad (\text{H. 32})$$

onde,

$$A_p = (1+\epsilon \cos \theta|_p) \quad (\text{H. 33})$$

$$\dot{\alpha}^* = \frac{d\alpha}{d\tau} \quad (\text{H. 34})$$

Finalmente, tem-se para a equação (H.2),

$$q_1^* R \Delta \xi + q_2^* R(\pi + \alpha) \Delta \eta = q_3^* R(\pi + \alpha) \Delta \eta + q_4^* R \Delta \xi + (q_5^* + q_6^*) R \Delta \xi \quad (\text{H. 35})$$

que, após simplificar-se os termos comuns, fornece,

$$q_1^* \Delta \xi + q_2^* (\pi + \alpha) \Delta \eta = q_3^* (\pi + \alpha) \Delta \eta + q_4^* \Delta \xi + (q_5^* + q_6^*) \Delta \xi \quad (\text{H. 36})$$

onde,

$$q_1^* = A_w - G_\eta \Big|_w A_w^{1/2} \left[\frac{A_w}{(\pi + \alpha)} \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_w + \frac{3}{2} B_w P_w \right] \quad (\text{H. 37a})$$

$$q_2^* = -G_\xi \Big|_s A_s^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_s \quad (\text{H. 37b})$$

$$q_3^* = -G_\xi \Big|_n A_n^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_n \quad (\text{H. 37c})$$

$$q_4^* = 1 - \epsilon \cos \alpha \quad (\text{H. 37d})$$

$$q_5^* = 2[\dot{\epsilon}^* \cos \theta|_p + \epsilon \sin \theta|_p (\omega_L^* - \dot{\psi}^*)](\pi + \alpha) \Delta \eta \quad (\text{H. 37e})$$

$$q_6^* = 2A_p \dot{\alpha}^* \Delta \eta \quad (\text{H. 37f})$$

e:

$$A_* = 1 + \epsilon \cos \theta|_* \quad (\text{H. 37g})$$

$$B_* = \epsilon \sin \theta|_* \quad (\text{H. 37h})$$

$$\theta|_* = (\pi + \alpha) \eta|_* \quad (\text{H. 37i})$$

APÊNDICE I

DETERMINAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DA TRAJETÓRIA - DESCONSIDERANDO A MASSA DO EIXO

O balanço de forças no mancal, desprezando a massa do eixo, fornece,

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \cos \psi + F_1^* = 0 \quad (\text{I.1a})$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \sin \psi + F_2^* = 0 \quad (\text{I.1b})$$

respectivamente para as direções ao longo (\hat{e}_1) e normal (\hat{e}_2) à linha de centros.

As componentes F_1^* e F_2^* da força hidrodinâmica são obtidas a partir da integração do campo de pressões, onde, de acordo com a equação (G.11), tem-se para cada volume de controle,

$$P_p = \left\{ \sum a_{viz} P_{viz} - [2\dot{\epsilon}^* \cos \theta - 2\dot{\psi}^* \sin \theta + \epsilon \sin \theta (2\omega_L^* - 1)] \Delta \eta \Delta \xi \right\} / a_p \quad (\text{I.2})$$

onde,

$$\sum a_{viz} P_{viz} = a_e P_E + a_w P_W + a_n P_N + a_s P_S \quad (\text{I.3})$$

o balanço de forças na direção \hat{e}_1 (I.1a) pode então ser escrito como,

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \cos \psi + \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P_p}{H^{3/2}} \cos \theta (\pi + \alpha) d\eta d\xi = 0 \quad (\text{I.4})$$

onde,

$$H = h/c = (1 + \epsilon \cos \theta) \quad (I.5a)$$

$$\theta = (\pi + \alpha) \eta \quad (I.5b)$$

Substituindo a equação (I.2) em (I.4) tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \cos \psi + \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{\sum a_{viz} P_{viz}}{a_p H^{3/2}} \cos \theta (\pi + \alpha) d\eta d\xi - \\ & - \dot{\epsilon}^* \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{2 \cos^2 \theta}{a_p H^{3/2}} (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi + \dot{\psi}^* \epsilon \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{2 \sin \theta}{a_p H^{3/2}} \cos \theta (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi - \\ & - \epsilon \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{(2\omega_L^* - 1) \sin \theta}{a_p H^{3/2}} \cos \theta (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi = 0 \end{aligned} \quad (I.6)$$

ou,

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \cos \psi + I_1 - \dot{\epsilon}^* I_2 + \dot{\psi}^* \epsilon I_3 - \epsilon I_4 = 0 \quad (I.7)$$

onde,

$$I_1 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{\sum a_{viz} P_{viz}}{a_p H^{3/2}} \cos \theta (\pi + \alpha) d\eta d\xi \quad (I.8a)$$

$$I_2 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{2 \cos^2 \theta}{a_p H^{3/2}} (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi \quad (I.8b)$$

$$I_3 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{2 \sin \theta}{a_p H^{3/2}} \cos \theta (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi \quad (I.8c)$$

$$I_4 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{(2\omega_L^* - 1)}{a_p H^{3/2}} \sin \theta \cos \theta (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi \quad (I.8d)$$

Da mesma forma, o balanço de forças na direção \hat{e}_2 (I.1b) pode ser escrito como,

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \sin \psi + \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P_P}{H^{3/2}} \sin \theta (\pi + \alpha) d\eta d\xi = 0 \quad (I.9)$$

que fornece,

$$\frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) W^* \sin \psi + I_5 - \ddot{\epsilon}^* I_6 + \dot{\psi}^* \epsilon I_7 - \epsilon I_8 = 0 \quad (I.10)$$

onde,

$$I_5 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{\sum_{viz} a_{viz} P_{viz}}{a_P H^{3/2}} \sin \theta (\pi + \alpha) d\eta d\xi \quad (I.11a)$$

$$I_6 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{2 \cos \theta}{a_P H^{3/2}} \sin \theta (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi \quad (I.11b)$$

$$I_7 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{2 \sin^2 \theta}{a_P H^{3/2}} (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi \quad (I.11c)$$

$$I_8 = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{(2\omega_L^* - 1) \sin^2 \theta}{a_P H^{3/2}} (\pi + \alpha) \Delta \eta \Delta \xi d\eta d\xi \quad (I.11d)$$

Portanto, a trajetória do eixo pode ser obtida do seguinte sistema de equações diferenciais,

$$K_1 W^* \cos \psi + I_1 - \ddot{\epsilon}^* I_2 + \dot{\psi}^* \epsilon I_3 - \epsilon I_4 = 0 \quad (I.12a)$$

$$K_1 W^* \sin \psi + I_5 - \ddot{\epsilon}^* I_6 + \dot{\psi}^* \epsilon I_7 - \epsilon I_8 = 0 \quad (I.12b)$$

onde I_1 a I_8 são dadas pelas equações (I.8) e (I.11) e ainda,

$$K_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{L}{R} \right) \quad (I.13)$$

APÊNDICE J

DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DA FORÇA HIDRODINÂMICA PARA A APROXIMAÇÃO
DE MANCAL CURTO - FORMULAÇÃO TURBULENTA

A partir do conhecimento da equação analítica da distribuição de pressão em um mancal curto, as componentes da força hidrodinâmica desenvolvida no mancal podem ser obtidas através da integração desta pressão sobre o domínio de solução, ou seja,

$$F_1^* = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P}{H^{3/2}} \cos(\pi\eta) \pi d\eta d\xi \quad (J.1a)$$

$$F_2^* = \int_0^{L/R} \int_0^1 \frac{P}{H^{3/2}} \sin(\pi\eta) \pi d\eta d\xi \quad (J.1b)$$

onde P é dado pela equação (107) e $H = h/c$.

A integração da equação (J.1a) ao longo de ξ , após a aplicação de seus limites fornece,

$$F_1^* = -\frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \int_0^1 \left\{ \frac{a_\xi}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \left\{ \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \sin(\pi\eta) \cos(\pi\eta) + 2\dot{\epsilon}^* \cos^2(\pi\eta) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{b_\xi \epsilon \cos(\pi\eta)}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \left\{ \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \sin(\pi\eta) \cos(\pi\eta) + 2\dot{\epsilon}^* \cos^2(\pi\eta) \right\} \right\} \pi d\eta \quad (J.2)$$

Com a finalidade de facilitar a integração da equação (J.2), esta será dividida em várias integrais da seguinte forma:

$$F_1^* = -\frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \left[\left(I_1 + I_2 \right) a_\xi + \left(I_3 + I_4 \right) b_\xi \right] \quad (J.3)$$

onde,

$$I_1 = \int_0^1 \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \frac{\sin(\pi\eta) \cos(\pi\eta)}{[1 + \epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.4a)$$

$$I_2 = \int_0^1 2\dot{\epsilon}^* \frac{\cos^2(\pi\eta)}{[1 + \epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.4b)$$

$$I_3 = \int_0^1 \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon^2 \frac{\sin(\pi\eta) \cos^2(\pi\eta)}{[1 + \epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.4c)$$

e,

$$I_4 = \int_0^1 2\dot{\epsilon}^* \epsilon \frac{\cos^3(\pi\eta)}{[1 + \epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.4d)$$

De forma a aplicar as transformações de Sommerfeld para as integrais I_1 a I_4 corretamente, existe a necessidade de retornar-se à variável θ , o que implica na alteração dos limites de integração. Assim,

$$I_1 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \left. A_3^{11} \right|_0^\pi \quad (J.5a)$$

$$I_1 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \frac{(-2\epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)^2} \quad (J.5b)$$

$$I_2 = 2\dot{\epsilon}^* \left. A_3^{02} \right|_0^\pi \quad (J.6a)$$

$$I_2 = 2\dot{\epsilon}^* \frac{1}{\epsilon^2} \left(A_3^{00} - 2A_2^{00} + A_1^{00} \right) \Big|_0^\pi \quad (J.6b)$$

$$I_2 = \pi \dot{\epsilon}^* \frac{(1 + 2\epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \quad (J.6c)$$

$$I_3 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon^2 A_3^{12} \Big|_0^\pi \quad (J.7a)$$

$$I_3 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon^2 \frac{1}{\epsilon^2} \left(A_3^{10} - 2A_2^{10} + A_1^{10} \right) \Big|_0^\pi \quad (J.7b)$$

$$I_3 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \left[\frac{2(2\epsilon^2 - 1)}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)} \right] \quad (J.7c)$$

$$I_4 = 2\dot{\epsilon}^* \epsilon A_3^{03} \Big|_0^\pi \quad (J.8a)$$

$$I_4 = 2\dot{\epsilon}^* \epsilon \frac{1}{\epsilon^3} \left(-A_3^{00} + 3A_2^{00} - 3A_1^{00} + A_0^{00} \right) \Big|_0^\pi \quad (J.8b)$$

$$I_4 = \dot{\epsilon}^* \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{-(6\epsilon^4 - 5\epsilon^2 + 2)}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} + 2 \right] \quad (J.8c)$$

Substituindo-se as equações (J.5b), (J.6c), (J.7c) e (J.8c) na equação (J.3), e agrupando-se os termos semelhantes, chega-se a,

$$\begin{aligned} F_1^* = & - \frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \left\{ \left[1 - 2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) \right] \left\{ \frac{2\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} c_\xi + \left[\frac{2}{(1 - \epsilon^2)} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)} \right] b_\xi \right\} + \right. \\ & \left. + \pi \dot{\epsilon}^* \left\{ \frac{(1 + 2\epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} c_\xi + \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{-(4\epsilon^2 - 6\epsilon^2 + 2)}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} + 2 \right] b_\xi \right\} \right\} \end{aligned} \quad (J.9)$$

onde,

$$c_\xi = a_\xi - b_\xi \quad (J.10)$$

Realizando-se, agora, a integração da equação (J.1b) ao longo de ξ , após a aplicação de seus limites obtém-se,

$$F_2^* = - \frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \int_0^1 \left\{ \frac{a_\xi}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \left\{ \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \sin^2(\pi\eta) + 2\dot{\epsilon}^* \sin(\pi\eta) \cos(\pi\eta) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{b_\xi \epsilon \cos(\pi\eta)}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \left\{ \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \sin^2(\pi\eta) + 2\dot{\epsilon}^* \sin(\pi\eta) \cos(\pi\eta) \right\} \right\} \pi d\eta \quad (J.11)$$

e, como anteriormente, a equação (J.11) será dividida em várias integrais da seguinte forma,

$$F_2^* = - \frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \left[\left(I_5 + I_6 \right) a_\xi + \left(I_7 + I_8 \right) b_\xi \right] \quad (J.12)$$

onde,

$$I_5 = \int_0^1 \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \frac{\sin^2(\pi\eta)}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.13a)$$

$$I_6 = \int_0^1 2\dot{\epsilon}^* \frac{\sin(\pi\eta) \cos(\pi\eta)}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.13b)$$

$$I_7 = \int_0^1 \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon^2 \frac{\sin^2(\pi\eta) \cos(\pi\eta)}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.13c)$$

$$I_8 = \int_0^1 2\dot{\epsilon}^* \epsilon \frac{\sin(\pi\eta) \cos^2(\pi\eta)}{[1+\epsilon \cos(\pi\eta)]^3} \pi d\eta \quad (J.13d)$$

Pela aplicação das transformações de Sommerfeld, que requer o uso da variável θ , tem-se para as integrais I_5 a I_8 ,

$$I_5 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \left. A_3^{20} \right|_0^\pi \quad (J.14a)$$

$$I_6 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon \left[\frac{\sin(\pi\eta)}{(1+\epsilon \cos\beta)^2} - \frac{A_2^{01}}{2\dot{\epsilon}^*} \right] \Big|_0^\pi \quad (J.14b)$$

$$I_7 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \frac{\epsilon \pi}{2(1-\epsilon^2)^{3/2}} \quad (J.14c)$$

$$I_6 = 2\dot{\epsilon}^* A_3^{11} \Big|_0^\pi \quad (J.15a)$$

$$I_6 = 2\dot{\epsilon}^* \frac{1}{\epsilon} \left(-A_3^{10} + A_2^{10} \right) \quad (J.15b)$$

$$I_6 = 2\dot{\epsilon}^* \frac{(-2\epsilon)}{(1-\epsilon^2)^2} \quad (J.15c)$$

$$I_7 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon^2 A_3^{21} \Big|_0^\pi \quad (J.16a)$$

$$I_7 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \epsilon^2 \frac{1}{\epsilon^3} \left[(1-\epsilon^2) A_3^{00} - (3-\epsilon^2) A_2^{00} + 3A_1^{00} - A_0^{00} \right] \Big|_0^\pi \quad (J.16b)$$

$$I_7 = \left[2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) - 1 \right] \frac{\pi}{\epsilon} \left[\frac{(2-3\epsilon^2)}{2(1-\epsilon^2)^{3/2}} - 1 \right] \quad (J.16c)$$

$$I_8 = 2\dot{\epsilon}^* \epsilon A_3^{12} \Big|_0^\pi \quad (J.17a)$$

$$I_8 = 2\dot{\epsilon}^* \epsilon \frac{1}{\epsilon^2} \left(A_3^{10} - 2A_2^{10} + A_1^{10} \right) \Big|_0^\pi \quad (J.17b)$$

$$I_8 = 2\dot{\epsilon}^* \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{2(2\epsilon^2-1)}{(1-\epsilon^2)^2} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right] \quad (J.17c)$$

Substituindo as equações (J.14c), (J.15b), (J.16c) e (J.17c) na equação (J.12), e agrupando-se os termos semelhantes, chega-se a,

$$\begin{aligned} F_2^* = \frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \left\{ \left[1 - 2(\omega_L^* - \dot{\psi}^*) \right] \pi \left\{ \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon^2)^{3/2}} c_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} - 1 \right] b_\xi \right\} + \right. \\ \left. + 2\dot{\epsilon}^* \left\{ \frac{2\epsilon}{(1-\epsilon^2)^2} c_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{2}{(1-\epsilon^2)} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right] b_\xi \right\} \right\} \quad (J.18) \end{aligned}$$

onde c_ξ é dado pela equação (J.10).

A partir das equações (J.9) e (J.18), a força hidrodinâmica é obtida pela simples composição vetorial das mesmas.

APÊNDICE K

TABELAS DE RESULTADOS

1. AVALIAÇÃO DE MALHAS COMPUTACIONAIS PARA CARREGAMENTO ESTÁTICO.

TABELA K1 - RELAÇÃO $\Delta x \in$ PARA $L/D = 1$.

ϵ	MALHA ($\eta \times \xi$)					erro%
	60x41	60x16	40x21	30x21*	30x8	
0,2	0,5034	0,5045	0,5040	0,5040	0,5100	-0,12
0,4	1,220	1,222	1,221	1,221	1,235	-0,08
0,6	2,624	2,629	2,625	2,624	2,655	0,00
0,8	7,116	7,132	7,116	7,104	7,194	0,17
0,97	66,00	66,25	65,54	64,70	65,88	1,97

* Os valores obtidos para a malha (*) em relação à malha de 60x41 pontos;

+ Os valores encontrados para $\epsilon = 0,0$ referem-se, na realidade, a $\epsilon = 1,0 \times 10^{-5}$

TABELA K2 - RELAÇÃO $\alpha \times \epsilon$ PARA $L/D = 1$.

ϵ	MALHA ($\eta \times \xi$)					erro%
	60x41	60x16	40x21	30x21 *	30x8	
0,0 ⁺	37,0	37,0	37,1	37,1	37,1	-0,27
0,2	33,9	33,9	34,0	34,0	34,0	-0,29
0,4	30,1	30,1	30,1	30,2	30,1	-0,33
0,6	25,1	25,1	25,2	25,2	25,1	-0,40
0,8	18,0	18,0	18,0	18,1	18,0	-0,56
0,97	6,86	6,86	6,92	7,00	6,98	-2,04

TABELA K3 - RELAÇÃO $p_{\max} / P_u \times \epsilon$ PARA $L/D = 1$.

ϵ	MALHA ($\eta \times \xi$)					erro%
	60x41	60x16	40x21	30x21 *	30x8	
0,0 ⁺	1,848	1,846	1,846	1,843	1,819	0,27
0,2	1,916	1,911	1,913	1,914	1,888	0,10
0,4	2,116	2,110	2,114	2,108	2,078	0,38
0,6	2,471	2,464	2,470	2,472	2,434	-0,04
0,8	3,183	3,174	3,176	3,186	3,135	-0,09
0,97	6,368	6,343	6,328	6,119	6,002	3,91

TABELA K4 - RELAÇÃO $\Delta x \in$ PARA $L/D = 1/2$.

ϵ	MALHA ($\eta \times \xi$)					erro%
	60x41	60x16	40x21	30x16*	30x8	
0,2	0,1566	0,1569	0,1568	0,1569	0,1587	-0,19
0,4	0,4048	0,4057	0,4052	0,4056	0,4100	-0,20
0,6	0,9949	0,9971	0,9955	0,9959	1,007	-0,10
0,8	3,458	3,465	3,457	3,453	3,490	0,14
0,97	50,80	50,93	50,37	49,71	50,33	2,15

TABELA K5 - RELAÇÃO $\alpha x \in$ PARA $L/D = 1/2$.

ϵ	MALHA ($\eta \times \xi$)					erro%
	60x41	60x16	40x21	30x16*	30x8	
0,0 ⁺	20,4	20,4	20,4	20,5	20,5	-0,49
0,2	19,6	19,6	19,6	19,8	19,7	-1,02
0,4	18,5	18,5	18,6	18,6	18,6	-0,54
0,6	16,9	16,9	17,0	17,1	17,1	-1,18
0,8	14,0	14,0	14,1	14,1	14,1	-0,71
0,97	6,63	6,63	6,70	6,76	6,75	-1,96

TABELA K6 - RELAÇÃO $p_{\max}/P_u \times \epsilon$ PARA $L/D = 1/2$.

ϵ	MALHA ($\eta \times \xi$)					erro%
	60x41	60x16	40x21	30x16*	30x8	
0,0 ⁺	1,892	1,888	1,890	1,887	1,866	0,26
0,2	2,000	1,996	1,998	1,996	1,973	0,20
0,4	2,293	2,288	2,292	2,289	2,262	0,17
0,6	2,791	2,784	2,781	2,785	2,751	0,21
0,8	3,760	3,750	3,764	3,753	3,705	0,19
0,97	7,534	7,511	7,618	7,149	7,045	5,11

TABELA K7 - RELAÇÃO $\Delta \times \epsilon$ PARA $L/D = 1/4$.

ϵ	MALHA ($\eta \times \xi$)					erro%
	60x41	60x16	40x21	30x16*	30x8	
0,2	0,04200	0,04210	0,04205	0,04209	0,04256	-0,21
0,4	0,1120	0,1122	0,1121	0,1122	0,1134	-0,18
0,6	0,2950	0,2957	0,2951	0,2952	0,2985	-0,07
0,8	1,206	1,209	1,205	1,203	1,216	0,25
0,97	30,22	30,29	29,91	29,41	29,72	2,68

TABELA K8 - RELAÇÃO $\alpha \times \epsilon$ PARA $L/D = 1/4$.

MALHA ($\eta \times \xi$)						
ϵ	60x41	60x16	40x21	30x16*	30x8	erro%
0,0 ⁺	10,6	10,6	10,7	10,9	10,9	-2,83
0,2	10,4	10,4	10,6	10,8	10,8	-3,85
0,4	10,2	10,2	10,4	10,5	10,5	-2,94
0,6	9,87	9,87	10,0	10,1	10,2	-2,33
0,8	9,08	9,08	9,22	9,33	9,34	-2,75
0,97	5,78	5,77	5,87	5,96	5,96	-3,11

TABELA K9 - RELAÇÃO $p_{\max}/P_U \times \epsilon$ PARA $L/D = 1/4$.

MALHA ($\eta \times \xi$)						
ϵ	60x41	60x16	40x21	30x16*	30x8	erro%
0,0 ⁺	1,906	1,902	1,902	1,901	1,880	0,26
0,2	2,048	2,044	2,045	2,043	2,020	0,24
0,4	2,416	2,411	2,416	2,410	2,382	0,25
0,6	3,029	3,022	3,025	3,017	2,982	0,40
0,8	4,254	4,243	4,259	4,199	4,149	1,29
0,97	9,131	9,106	9,388	8,696	8,581	4,76

2. PARÂMETROS COMPUTACIONAIS E GRÁFICOS

TABELA K10 - CARREGAMENTO DINÂMICO.

GRÁF.	CASO	CURVA	MALHA	$\Delta\tau$	TEMPO ^o DE CPU	ITPR [*]	TOTAL ⁺ PTS.	POS. EQUILÍBRIO	ARQUIVO
24(a)	1	1	30x16	0,03	1min09s	5	78	-0,44424; -0,45061	FSDERL1A
		2	40x21	0,03	2min51s	5	79	-0,44352; -0,45126	FSDERL1B
		3	60x41	0,03	19min0s	5	79	-0,44304; -0,45178	FSDERL1C
24(b)	2	1	30x16	0,03	5min36s	5	329	-0,32972; -0,15994	FSDERL2A
		2	40x21	0,03	14min56s	5	317	-0,32944; -0,16023	FSDERL2B
		3	60x41	0,03	101min07s	5	302	-0,33029; -0,16075	FSDERL2C
25(a)	1	1	30x16	0,03	1min09s	5	78	11,70; 0,63277	FSDERE1A
		2	40x21	0,03	2min51s	5	79	11,85; 0,63273	FSDERE1B
		3	60x41	0,03	19min 0s	5	79	11,85; 0,63276	FSDERE1C
25(b)	2	1	30x16	0,03	5min36s	5	329	49,35; 0,36647	FSDERE2A
		2	40x21	0,03	14min56s	5	317	47,55; 0,36679	FSDERE2B
		3	60x41	0,03	101min07s	5	302	45,30; 0,36733	FSDERE2C
27(a)	1	1	40x21	0,03	53,19s	5	80	11,85; 0,16732	FSDERA1A
		2	40x21	0,03	1min11s	5	80	11,85 0,16734	FSDSRA1A
27(b)	2	1	40x21	0,03	3min00s	5	300	44,85; 0,31694	FSDERA2A
		2	40x21	0,03	3min21s	5	300	44,85; 0,31697	FSDSRA2A
28	2	1	40x21	0,03	3min00s	5	300	44,85; 0,31694	FSDERA2A
		2	40x21	0,1	1min24s	1	474	47,30; 0,31691	FSDERA2B
		3	40x21	0,3	1min24s	1	146	43,50; 0,31720	FSDERA2C
29	2	1	40x21	0,03	3min00s	5	300	-0,33016; -0,16046	FSDERL2D
		2	40x21	0,03	3min09s	5	327	-0,32976; -0,16039	FSDEEL2A
30	2	1	40x21	0,01	5min58s	15	268	-0,32921; -0,16045	FSDERL2E
		2	40x21	0,01	5min59s	15	269	-0,32912; -0,16054	FSDEEL2B

^o Computador, IBM 3090 com compilador, FORTRAN VSF2.

^{*} 1 ponto utilizado na construção da curva em cada η pontos calculados.

⁺ Total de pontos utilizados na construção da curva.

TABELA K10 - CARREGAMENTO DINÂMICO (Continuação).

GRÁF.	CASO	CURVA	MALHA	$\Delta\tau$	TEMPO ^o DE CPU	ITPR [*]	TOTAL ⁺ PTS.	POS. EQUILÍBRIO	ARQUIVO
33(a)	4	1	40x21	0,06	5min03s	3	520	-0,43492; -0,67366	FSDERL4A
		2	-	0,06	0,71s	3	556	-0,42703; -0,61400	CCDRL4A
33(b)	5	1	40x21	0,06	12min31s	3	2386	-0,45625; -0,57322	FSDERL5A
		2	-	0,06	1,18s	3	1667	-0,42870; -0,53076	CCDRL5A
45(a)	4	-	40x21	0,06	5min03s	3	520	-0,43492; -0,67366	FSDERL4A
45(b)	4	-	40x21	0,06	4min47s	3	441	-0,48159; -0,57658	FSDERL4B
46(a)	5	-	40x21	0,06	12min31s	3	2386	-0,45625; -0,57322	FSDERL5A
46(b)	5	-	40x21	0,06	6min50s	3	595	(divergiu)	FSDERL5B
46(a)	5	-	40x21	0,06	12min31s	3	2386	-0,45625; -0,57322	FSDERL5A

TABELA K11 - CARREGAMENTO ALTERNATIVO.

GRÁF.	CASO	CURVA	MALHA	$\Delta\tau$	TEMPO ^o DE CPU	(ϵ_0 , ψ_0)	ITPR	TOTAL PTS.	ARQUIVO
32	3	-	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	61min07s	0,5;00	1	73	FSASBL3A
35	1	-	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	81min04s	0,7;0,0	1	433	FSASBL1A
38	1	-	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	62min41s	0,3;1,2	1	145	FSASBL1B
40	6	-	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	86min55s	0,7;-0,36	5	289	FSASBL6A
41	6	-	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	86min55s	0,7;-0,36	5	289	FSASBC6A
42	6	-	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	86min55s	0,7;-0,36	5	289	FSASBQ6A
44	6	1	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	86min55s	0,7;-0,36	5	289	FSASBL6A
		2	20x16	$0,87266 \times 10^{-2}$	36min26s	0,7;-0,36	5	289	FSASBL6B
47	6	-	-	$0,87266 \times 10^{-2}$	0,06s	0,7;-0,36	5	289	CCASBL6A
48	6	1	40x21	$0,87266 \times 10^{-2}$	86min55s	0,7;-0,36	5	289	FSASBQ6A
		2	-	$0,87266 \times 10^{-2}$	0,06s	0,7;-0,36	5	289	CCASBQ6A

3. NORMALIZAÇÃO DOS ARQUIVOS

